Zeno Martini (admin)

PARAMETRI Z ED Y

20 March 2008

Articolo n° 1 su 1 del corso "**Doppi bipoli e linee**". Vai all'**indice** del corso.

Paragrafi dell'articolo:

DOPPI BIPOLI PASSIVI

Un circuito in cui si individuano due coppie di terminali si dice doppio bipolo.

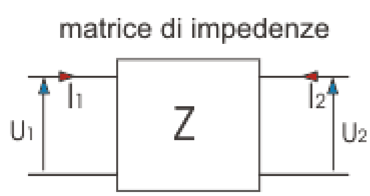
Le grandezze elettriche descrittive di entrambe le coppie di bipoli sono tensione e corrente: U_1, I_1 per il bipolo 1, e per il bipolo 2, U_2, I_2. La scelta dei versi positivi è sostanzialmente arbitraria, ma in genere si scelgono le correnti entranti dai poli contrassegnati come a potenziale più alto.

Considereremo **doppi bipoli passivi**: un doppio bipolo si dice passivo o inerte se le tensioni tra i terminali in assenza di alimentazione esterna sono nulle.

Delle quattro grandezze descrittive (U_1, I_1 U_2, I_2) due sono considerate note e sono dette variabili indipendenti (o ingressi); le altre due incognite; sono le variabili dipendenti, (o uscite). Le relazioni tra gli ingressi e le uscite danno luogo a due equazioni che costituiscono un sistema . Il sistema è identificato dalla matrice dei coefficienti, di ordine due, che sono i parametri del sistema , che vengono qualificati in base al loro significato fisico. Si hanno 6 possibilità descritte sinteticamente nella seguente tabella.

gruppo	Ingressi	uscite	Matrice	parametri
Impedenze **ammettenze**	**I_1** **I_2**	**U_1** **U_2**	Impedenze [Z]	**Z** Z_{11},Z_{12},Z_{21},Z_{22}
	U_1 **U_2**	**I_1** **I_2**	Ammettenze [Y]	**Y** Y_{11},Y_{12},Y_{21},Y_{22}
Ibrido	**I_1** **U_2**	**I_2** **U_1**	Ibrida diretta [H]	**h** h_{11},h_{12},h_{21},h_{22}
	I_2 **U_1**	**I_1** **U_2**	Ibrida inversa [G]’	**g** g_{11},g_{12},g_{21},g_{22}
Misto	**U_2** **$-I_2$**	**U_1** **I_1**	Trasmissione diretta [T]	A,B,C,D
	U_1 **$-I_1$**	**U_2** **I_2**	Trasmissione inversa [T]’	A’,B’,C’,D’

MATRICE DI IMPEDENZE: I PARAMETRI Z



I parametri del sistema sono tutti dello stesso tipo: rapporti tra tensioni e correnti, quindi omogenei con una impedenza che sii misura in ohm. Considereremo in generale grandezze sinusoidali.

$$\dot{U}_1 = \dot{Z}_{11} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{12} \cdot \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \dot{Z}_{21} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{22} \cdot \dot{I}_2$$

$$\left[\dot{U}\right] = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\dot{I}\right] = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\dot{Z}\right] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left[\dot{U}\right] = \left[\dot{Z}\right] \cdot \left[\dot{I}\right]$$

Definizioni

$$\dot{Z}_{11} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right)_{\dot{I}_2=0} \quad \text{impedenza di ingresso a vuoto}$$

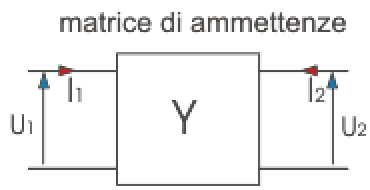
$$\dot{Z}_{12} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right)_{\dot{I}_1=0} \quad \text{impedenza mutua in ingresso}$$

$$\dot{Z}_{21} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right)_{\dot{I}_2=0} \quad \text{impedenza mutua in uscita}$$

$$\dot{Z}_{22} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right)_{\dot{I}_1=0} \quad \text{impedenza di uscita a vuoto}$$

$$\text{Se } \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} \Rightarrow \text{doppio bipolo reciproco}$$

MATRICE DI AMMETTENZE: I PARAMETRI Y



I parametri del sistema sono tutti dello stesso tipo: rapporti tra correnti e tensioni, quindi omogenei con una ammettenza che sii misura in siemens=1/ohm.

$$\dot{I}_1 = \dot{Y}_{11} \cdot \dot{U}_1 + \dot{Y}_{12} \cdot \dot{U}_2$$
$$\dot{I}_2 = \dot{Y}_{21} \cdot \dot{U}_1 + \dot{Y}_{22} \cdot \dot{U}_2$$
$$\left[\dot{U}\right] = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}$$
$$\left[\dot{I}\right] = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$
$$\left[\dot{Y}\right] = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} \end{bmatrix}$$
$$\left[\dot{I}\right] = \left[\dot{Y}\right] \cdot \left[\dot{U}\right]$$

Definizioni

$\dot{Y}_{11} = \left(\dfrac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right)_{\dot{U}_2=0}$ ammettenza di ingresso con uscita cortocircuitata

$\dot{Y}_{12} = \left(\dfrac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right)_{\dot{U}_1=0}$ ammettenza mutua di ingresso

$\dot{Y}_{21} = \left(\dfrac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right)_{\dot{U}_2=0}$ ammettenza mutua di uscita

$\dot{Y}_{22} = \left(\dfrac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right)_{\dot{U}_1=0}$ ammettenza di uscita con ingresso cortocircuitato

Se $\dot{Y}_{21} = \dot{Y}_{12} \Rightarrow$ doppio bipolo reciproco

Osservazioni

1. Se le impedenze mutue, quindi anche le ammettenze, sono completamente diverse come ordine di grandezza, diciamo Z_{12} "molto piccola", Z_{21} "molto grande" si dice che l'ingresso è disaccoppiato dall'uscita mentre l'uscita è molto accoppiata con l'ingresso. E' il caso, ad esempio, degli amplificatori. L'uscita deve risentire molto dell'ingresso in quanto deve riprodurre fedelmente l'ingresso amplificandolo, ed una "piccola" tensione deve produrre una "grande corrente";viceversa l'ingresso non deve risentire dell'uscita, cioè una tensione in uscita deve produrre una "corrente piccola" in ingresso. A rigore gli aggettivi grande e piccolo hanno poco senso, per questo sono stati virgolettati: occorrerebbe un termine di confronto. Ma hanno un valore intuitivo.
2. Nota la matrice di impedenze si può ricavare quella delle ammettenze. Osservando le relazioni matriciali si può osservare che la matrice delle ammettenze è l'inversa della matrice di impedenze

$$\left[\dot{U}\right] = \left[\dot{Z}\right] \cdot \left[\dot{I}\right] \Rightarrow \left[\dot{Z}\right] = \frac{\left[\dot{U}\right]}{\left[\dot{I}\right]}$$
$$\left[\dot{I}\right] = \left[\dot{Y}\right] \cdot \left[\dot{U}\right] \Rightarrow \left[\dot{Y}\right] = \frac{\left[\dot{I}\right]}{\left[\dot{U}\right]}$$
$$\left[\dot{Y}\right] = \frac{1}{\left[\dot{Z}\right]} = \left[\dot{Z}\right]^{-1}$$

3. Il metodo generale per passare da un insieme di parametri all'altro consiste nell'applicare le definizioni di ogni parametro, risolvendo il sistema in cui

compaiono i parametri noti. Nel caso specifico, noti i parametri Z trovare i parametri Y.

$$\dot{U}_2 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{11} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{12} \cdot \dot{I}_2 \\ 0 = \dot{Z}_{21} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{22} \cdot \dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\left|\dot{Z}\right| = \dot{Z}_{11} \cdot \dot{Z}_{22} - \dot{Z}_{12} \cdot \dot{Z}_{21}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{U}_1 & \dot{Z}_{12} \\ 0 & \dot{Z}_{22} \end{vmatrix}}{\left|\dot{Z}\right|} = \frac{\dot{U}_1 \cdot \dot{Z}_{22}}{\left|\dot{Z}\right|}$$

$$\dot{Y}_{11} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right)_{\dot{U}_2 = 0} = \frac{\dot{Z}_{22}}{\left|\dot{Z}\right|}$$

$$\dot{Y}_{21} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right)_{\dot{U}_2 = 0} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{U}_1 \\ \dot{Z}_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\left|\dot{Z}\right|} = -\frac{\dot{Z}_{21}}{\left|\dot{Z}\right|}$$

$$\dot{U}_1 = 0$$

$$\begin{cases} 0 = \dot{Z}_{11} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{12} \cdot \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \dot{Z}_{21} \cdot \dot{I}_1 + \dot{Z}_{22} \cdot \dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\dot{Y}_{12} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right)_{\dot{U}_1 = 0} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dot{Z}_{12} \\ \dot{U}_2 & \dot{Z}_{22} \end{vmatrix}}{\left|\dot{Z}\right|} = -\frac{\dot{Z}_{12}}{\left|\dot{Z}\right|}$$

$$\dot{Y}_{22} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right)_{\dot{U}_1 = 0} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{Z}_{11} & 0 \\ \dot{Z}_{12} & \dot{U}_2 \end{vmatrix}}{\left|\dot{Z}\right|} = \frac{\dot{Z}_{11}}{\left|\dot{Z}\right|}$$

Reciprocità e simmetria

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} \text{ oppure } \dot{Y}_{12} = \dot{Y}_{21} \Rightarrow \text{doppio bipolo reciproco}$$

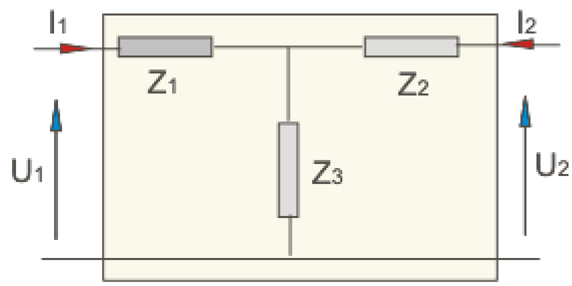
$$\begin{cases} \dot{Z}_{11} = \dot{Z}_{22} \\ \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} \end{cases} \Rightarrow \text{doppio bipolo simmetrico}$$

- Un doppio bipolo passivo è sempre reciproco.
- Un doppio bipolo simmetrico è anche reciproco

ESERCIZI

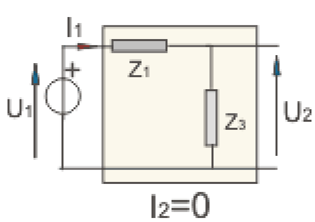
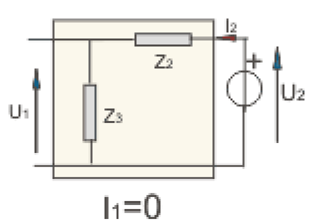
1)

Calcolare i parametri Z ed i parametri Y del doppio bipolo di figura (schema a "T")

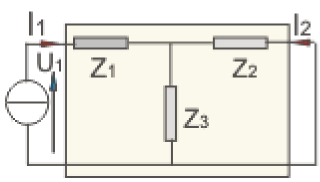
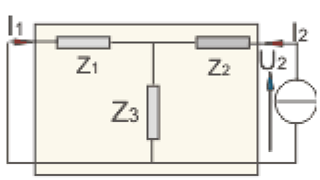


$$\dot Z_1 = 2 + j2$$
$$\dot Z_2 = 1 + j3$$
$$\dot Z_3 = 2 - j$$

L'esercizio si risolve applicando direttamente le definizioni

Parametri Z	
	$\dot Z_{11} = \left(\frac{\dot U_1}{\dot I_1}\right)_{\dot I_2=0} = \dot Z_1 + \dot Z_3$
	$\dot U_2 = \dot Z_3 \cdot \dot I_1$ $\dot Z_{21} = \left(\frac{\dot U_2}{\dot I_1}\right)_{\dot I_1=0} = \dot Z_3$
	$\dot Z_{22} = \left(\frac{\dot U_2}{\dot I_2}\right)_{\dot I_1=0} = \dot Z_2 + \dot Z_3$

	$\dot U_1 = \dot Z_3 \cdot \dot I_2$ $\dot Z_{12} = \left(\frac{\dot U_1}{\dot I_2}\right)_{\dot I_1=0} = \dot Z_3$
$\left[\dot Z\right] = \begin{bmatrix} \dot Z_1 + \dot Z_3 & \dot Z_3 \\ \dot Z_3 & \dot Z_2 + \dot Z_3 \end{bmatrix}$	

Parametri Y	
 U2=0	$\dot U_1 = \dot I_1 \cdot \left(\dot Z_1 + \frac{\dot Z_2 \cdot \dot Z_3}{\dot Z_2 + \dot Z_3}\right)$ $\dot Y_{11} = \left(\frac{\dot I_1}{\dot U_1}\right)_{\dot U_2=0} = \frac{\dot Z_2 + \dot Z_3}{\dot Z_1 \cdot \dot Z_2 + \dot Z_1 \cdot \dot Z_3 + \dot Z_2 \cdot \dot Z_3}$
	$\dot I_2 = -\dot I_1 \cdot \frac{\dot Z_3}{\dot Z_2 + \dot Z_3}$ $\dot U_1 = \dot I_1 \cdot \left(\dot Z_1 + \frac{\dot Z_2 \cdot \dot Z_3}{\dot Z_2 + \dot Z_3}\right)$ $\dot Y_{21} = \left(\frac{\dot I_2}{\dot U_1}\right)_{\dot U_2=0} = -\frac{\dot Z_3}{\dot Z_1 \cdot \dot Z_2 + \dot Z_1 \cdot \dot Z_3 + \dot Z_2 \cdot \dot Z_3}$
 U1=0	$\dot U_2 = \dot I_2 \cdot \left(\dot Z_2 + \frac{\dot Z_1 \cdot \dot Z_3}{\dot Z_1 + \dot Z_3}\right)$ $\dot Y_{22} = \left(\frac{\dot I_2}{\dot U_2}\right)_{\dot I_1=0} = \frac{\dot Z_1 + \dot Z_3}{\dot Z_1 \cdot \dot Z_2 + \dot Z_1 \cdot \dot Z_3 + \dot Z_2 \cdot \dot Z_3}$

	$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \cdot \left(\dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3} \right)$ $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 \cdot \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3}$ $\dot{Y}_{12} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} \right)_{\dot{U}_1 = 0} = -\frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3}$

$$\left[\dot{Y}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3} & -\frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3} \\ -\frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3} & \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 + \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_3 + \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3} \cdot \begin{bmatrix} \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 & -\dot{Z}_3 \\ -\dot{Z}_3 & \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\left[\dot{Z}\right]} \quad =$$

Soluzione.

Per i parametri Z i calcoli sono semplici anche manualmente (R: Z_{11}= 4 + j Z_{12} = 2 - j

Z_{21} = 2 - j Z_{22} = 3 + 2j).

Più laborioso è determinare i parametri Y. Con Scilab non ci sono comunque difficoltà: basta invertire la matrice delle Z (R: Y_{11}= 0.1861314 - j0.1131387 Y_{12}=0.0036496 +j 0.1350365

Y_{21} = 0.0036496 + j0.1350365i Y_{22} = 0.1569343 - j0.1934307)

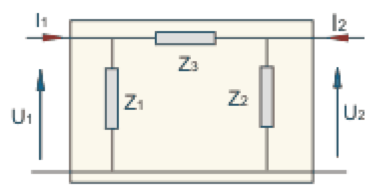
Ecco il codice che si può copiare ed incollare nella finestra di Scilab per risolvere l'esercizio con qualsiasi terna di impedenze.

```
//Introduzione resistenze e reattanze

txt=['R1=';'X1=';'R2=';'X2=';'R3=';'X3='];

RX=evstr(x_mdialog('resistenze ed alimentazione',txt,['2';'2';'1';'3';'2';'-1']));

//terna di impedenze a T

Z1T=RX(1)+%i*RX(2)
```

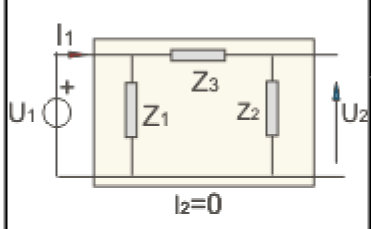
```
Z2T=RX(3)+%i*RX(4)

Z3T=RX(5)+%i*RX(6)

//parametri Z per la terna di impedenze a T

ZT=[Z1T+Z3T,Z3T;Z3T,Z2T+Z3T]

//parametri Y  per la terna di impedenze a T

YT=1/ZT
```

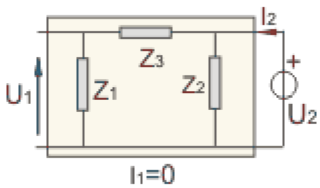
2)

Calcolare i parametri Z ed i parametri Y del doppio bipolo di figura (schema a "PIGRECO")



$$\dot{Z}_1 = 3 - j4$$
$$\dot{Z}_2 = 5 + j2$$
$$\dot{Z}_3 = 1 - j2$$

<table>
<tr><th colspan="2">Parametri Z</th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$\dot{Z}_{11} = \left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right)_{\dot{I}_2=0} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot (\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}$</td></tr>
<tr><td>$\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \cdot \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} \cdot \dot{Z}_2$
$\dot{Z}_{21} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right)_{\dot{I}_2=0} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}$</td></tr>
</table>



$$\dot{Z}_{22} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right)_{\dot{I}_1=0} = \frac{\dot{Z}_2\cdot\left(\dot{Z}_1+\dot{Z}_3\right)}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

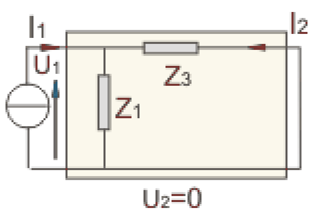
$$\dot{U}_1 = \dot{I}_2\cdot\frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}\cdot\dot{Z}_1$$

$$\dot{Z}_{21} = \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right)_{\dot{I}_1=0} = \frac{\dot{Z}_1\cdot\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$$

$$\left[\dot{Z}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\dot{Z}_1\cdot\left(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3\right)}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2+\dot{Z}_3} & \frac{\dot{Z}_1\cdot\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2+\dot{Z}_3} \\ \frac{\dot{Z}_1\cdot\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2+\dot{Z}_3} & \frac{\dot{Z}_2\cdot\left(\dot{Z}_1+\dot{Z}_3\right)}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2+\dot{Z}_3} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}\begin{bmatrix} \dot{Z}_1\cdot\left(\dot{Z}_2+\dot{Z}_3\right) & \dot{Z}_1\cdot\dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_1\cdot\dot{Z}_2 & \dot{Z}_2\cdot\left(\dot{Z}_1+\dot{Z}_3\right) \end{bmatrix}$$

Parametri Y



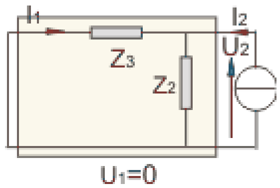
$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1\cdot\left(\frac{1}{\dot{Z}_1}+\frac{1}{\dot{Z}_3}\right) = \dot{I}_1\cdot\left(\dot{Y}_1+\dot{Y}_3\right)$$

$$\dot{Y}_{11} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right)_{\dot{U}_2=0} = \frac{\dot{Z}_1+\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1\cdot\dot{Z}_3} = \dot{Y}_1+\dot{Y}_3$$

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_1\cdot\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_3}$$

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1\cdot\frac{\dot{Z}_1\cdot\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_3}$$

$$\dot{Y}_{21} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right)_{\dot{U}_2=0} = -\frac{1}{\dot{Z}_3} = -\dot{Y}_3$$

	$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \cdot \left(\frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3}\right) = \dot{I}_2 \cdot \left(\dot{Y}_2 + \dot{Y}_3\right)$ $\dot{Y}_{22} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right)_{\dot{U}_1=0} = \frac{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3} = \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3$
	$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 \cdot \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$ $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \cdot \frac{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}$ $\dot{Y}_{12} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right)_{\dot{U}_1=0} = -\frac{1}{\dot{Z}_3} = -\dot{Y}_3$
$\left[\dot{Y}\right] = \begin{bmatrix} \dot{Y}_1+\dot{Y}_3 & -\dot{Y}_3 \\ -\dot{Y}_3 & \dot{Y}_2+\dot{Y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{Z}_1+\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_3} & -\frac{1}{\dot{Z}_3} \\ -\frac{1}{\dot{Z}_3} & \frac{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3} \end{bmatrix} =$ $= \frac{1}{\dot{Z}_3} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\dot{Z}_1+\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1} & -1 \\ -1 & \frac{\dot{Z}_2+\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left[\dot{Z}\right]}$	

Soluzione

Risulta molto più agevole trasformare le impedenze date in ammettenze, quindi ricavare i parametri Y (R: Y_{11}=0.32 + j0.56; Y_{12}=- 0.2 - j0.4; Y_{21} = - 0.2 - j0.4; Y_{22}= 0.3724138 + j0.3310345) . Invertendo la matrice dei parametri Y si ha quella dei parametri Z (R: . Z11=2.6597938 - j1.4845361; Z_{12}=2.7113402 - j0.3505155; Z_{21}=2.7113402 - j0.3505155; Z_{22}= 3.8762887 -j0.7216495)

Ecco il *codice in Scilab*

```
//terna di impedenze

txt=['R1=';'X1=';'R2=';'X2=';'R3=';'X3='];
```

```
RX=evstr(x_mdialog('resistenze ed alimentazione',txt,['3';'-4';'5';'2';'1';'-2']));

//terna a PIGRECO

Z1=RX(1)+%i*RX(2)

Z2=RX(3)+%i*RX(4)

Z3=RX(5)+%i*RX(6)

Y1=1/Z1

Y2=1/Z2

Y3=1/Z3

//parametri Y

Y=[Y1+Y3,-Y3;-Y3,Y2+Y3]

//parametri Z

Z=1/Y
```

Equivalenze: T e Pigreco

Formalmente noti i parametri Z di un qualsiasi doppio bipolo reciproco, si può ricavare il doppio bipolo equivalente a T con le seguenti relazioni

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_{11} - \dot{Z}_{12}$$
$$\dot{Z}_2 = \dot{Z}_{22} - \dot{Z}_{12}$$
$$\dot{Z}_3 = \dot{Z}_{12}$$

Può però capitare che Z_1 e Z_2 abbiano parte reale negativa, il che significa che il doppio bipolo equivalente non è fisicamente realizzabile con soli componenti passivi R, L, C. Il bipolo equivalente a T ha, in tal caso, solo validità teorica.

Ad esempio con i dati dell'ultimo esercizio si ricavano

- **Z_{1T} = - 0.0515464** - j1.1340206;
- Z_{2T} = 1.1649485 - j0.3711340;
- Z_{3T}=2.7113402 - j0.3505155

Formalmente ancora, noti i parametri Y di un qualsiasi doppio bipolo reciproco, si può ricavare il doppio bipolo equivalente a PIGRECO

$$\dot{Y}_1 = \dot{Y}_{11} + \dot{Y}_{12}$$
$$\dot{Y}_2 = \dot{Y}_{22} + \dot{Y}_{12}$$
$$\dot{Y}_3 = -\dot{Y}_{12}$$

Può però capitare che Y_3 abbia parte reale negativa, il che significa che il doppiobipolo equivalente non è fisicamente realizzabile con soli componenti passivi R, L, C. Il bipolo equivalente a pigreco ha dunque solo validità teorica in tal caso. E' quello che succede con i dati del primo esercizio

- Y_{1P} = 0.1897810 + j0.0218978
- Y_{2P} = 0.1605839 - j0.0583942
- **Y_{3P} = - 0.0036496** - j0.1350365

Due **doppi bipoli** sono **equivalenti** se hanno la stessa matrice di impedenze o di ammettenze. Si possono allora trovare le relazioni che permettono di passare da un doppio bipolo a T al doppio bipolo a Pigreco equivalente.

Con riferimento alle figure dei precedenti esercizi:

$$\left[\dot{Y}\right]_T = \frac{1}{\dot{Z}_{1T}\cdot\dot{Z}_{2T}+\dot{Z}_{1T}\cdot\dot{Z}_{3T}+\dot{Z}_{2T}\cdot\dot{Z}_{3T}}\cdot\begin{bmatrix}\dot{Z}_{2T}+\dot{Z}_{3T} & -\dot{Z}_{3T}\\ -\dot{Z}_{3T} & \dot{Z}_{1T}+\dot{Z}_{3T}\end{bmatrix}$$

$$\left[\dot{Y}\right]_\pi = \begin{bmatrix}\dot{Y}_{1\pi}+\dot{Y}_{3\pi} & -\dot{Y}_{3\pi}\\ -\dot{Y}_{3\pi} & \dot{Y}_{2\pi}+\dot{Y}_{3\pi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\dot{Z}_{1\pi}}+\frac{1}{\dot{Z}_{3\pi}} & -\frac{1}{\dot{Z}_{3\pi}}\\ -\frac{1}{\dot{Z}_{3\pi}} & \frac{1}{\dot{Z}_{2\pi}}+\frac{1}{\dot{Z}_{3\pi}}\end{bmatrix}$$

$$\left[\dot{Y}\right]_T = \left[\dot{Y}\right]_\pi \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{Z}_{2T}+\dot{Z}_{3T}}{\dot{Z}_{1T}\cdot\dot{Z}_{2T}+\dot{Z}_{1T}\cdot\dot{Z}_{3T}+\dot{Z}_{2T}\cdot\dot{Z}_{3T}} = \frac{1}{\dot{Z}_{1\pi}}+\frac{1}{\dot{Z}_{3\pi}}$$

$$\frac{\dot{Z}_{1T}+\dot{Z}_{3T}}{\dot{Z}_{1T}\cdot\dot{Z}_{2T}+\dot{Z}_{1T}\cdot\dot{Z}_{3T}+\dot{Z}_{2T}\cdot\dot{Z}_{3T}} = \frac{1}{\dot{Z}_{2\pi}}+\frac{1}{\dot{Z}_{3\pi}}$$

$$\frac{\dot{Z}_{3T}}{\dot{Z}_{1T}\cdot\dot{Z}_{2T}+\dot{Z}_{1T}\cdot\dot{Z}_{3T}+\dot{Z}_{2T}\cdot\dot{Z}_{3T}} = \frac{1}{\dot{Z}_{3\pi}}$$

Note le impedenze a T di un doppio bipolo le impedenze del doppio bipolo equivalente a Π si calcolano con:

$$\dot{Z}_{1\pi} = \dot{Z}_{1T}+\dot{Z}_{3T}+\frac{\dot{Z}_{1T}\cdot\dot{Z}_{3T}}{\dot{Z}_{2T}}$$

$$\dot{Z}_{2\pi} = \dot{Z}_{2T}+\dot{Z}_{3T}+\frac{\dot{Z}_{2T}\cdot\dot{Z}_{3T}}{\dot{Z}_{1T}}$$

$$\dot{Z}_{3\pi} = \dot{Z}_{1T}+\dot{Z}_{2T}+\frac{\dot{Z}_{1T}\cdot\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{3T}}$$

oppure

$$\frac{\frac{1}{\dot{Y}_{2T}}+\frac{1}{\dot{Y}_{3T}}}{\frac{1}{\dot{Y}_{1T}}\cdot\frac{1}{\dot{Y}_{2T}}+\frac{1}{\dot{Y}_{1T}}\cdot\frac{1}{\dot{Y}_{3T}}+\frac{1}{\dot{Y}_{3T}}\cdot\frac{1}{\dot{Y}_{2T}}} = \dot{Y}_{1\pi}+\dot{Y}_{3\pi}$$

$$\frac{\dot{Y}_{3T}+\dot{Y}_{2T}}{\dot{Y}_{2T}\cdot\dot{Y}_{3T}}\cdot\frac{\dot{Y}_{1T}\cdot\dot{Y}_{2T}\cdot\dot{Y}_{3T}}{\dot{Y}_{1T}+\dot{Y}_{2T}+\dot{Y}_{3T}} = \dot{Y}_{1\pi}+\dot{Y}_{3\pi}$$

$$\frac{\dot{Y}_{1T}\cdot\left(\dot{Y}_{2T}+\dot{Y}_{3T}\right)}{\dot{Y}_{1T}+\dot{Y}_{2T}+\dot{Y}_{3T}} = \dot{Y}_{1\pi}+\dot{Y}_{3\pi}$$

$$\frac{\dot{Y}_{2T}\cdot\left(\dot{Y}_{1T}+\dot{Y}_{3T}\right)}{\dot{Y}_{1T}+\dot{Y}_{2T}+\dot{Y}_{3T}} = \dot{Y}_{2\pi}+\dot{Y}_{3\pi}$$

$$\frac{\dot{Y}_{1T}\cdot\dot{Y}_{2T}}{\cdots} = \dot{Y}_{3\pi}$$

Note le ammettenze a T di un doppio bipolo le ammettenze del doppio bipolo equivalente a Π si calcolano con:

$$\dot{Y}_{1\pi} = \frac{\dot{Y}_{1T} \cdot \dot{Y}_{3T}}{\dot{Y}_{1T} + \dot{Y}_{2T} + \dot{Y}_{3T}}$$

$$\dot{Y}_{2\pi} = \frac{\dot{Y}_{2T} \cdot \dot{Y}_{3T}}{\dot{Y}_{1T} + \dot{Y}_{2T} + \dot{Y}_{3T}}$$

$$\dot{Y}_{3\pi} = \frac{\dot{Y}_{1T} \cdot \dot{Y}_{2T}}{\dot{Y}_{1T} + \dot{Y}_{2T} + \dot{Y}_{3T}}$$

Viceversa dal doppio bipolo con impedenze o ammettenze a pigreco si ricavano le impedenze ed ammettenze del doppio bipolo equivalente a stella.

$$\left[\dot{Z}\right]_T = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{1T}+\dot{Z}_{3T} & \dot{Z}_{3T} \\ \dot{Z}_{3T} & \dot{Z}_{2T}+\dot{Z}_{3T} \end{bmatrix}$$

$$\left[\dot{Z}\right]_\pi = \frac{1}{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}} \begin{bmatrix} \dot{Z}_{1\pi}\cdot\left(\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}\right) & \dot{Z}_{1\pi}\cdot\dot{Z}_{2\pi} \\ \dot{Z}_{1\pi}\cdot\dot{Z}_{2\pi} & \dot{Z}_{2\pi}\cdot\left(\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{3\pi}\right) \end{bmatrix}$$

$$\left[\dot{Z}\right]_T = \left[\dot{Z}\right]_\pi \Rightarrow$$

$$\dot{Z}_{1T}+\dot{Z}_{3T} = \frac{\dot{Z}_{1\pi}\cdot\left(\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}\right)}{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}}$$

$$\dot{Z}_{2T}+\dot{Z}_{3T} = \frac{\dot{Z}_{2\pi}\cdot\left(\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{3\pi}\right)}{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}}$$

$$\dot{Z}_{3T} = \frac{\dot{Z}_{1\pi}\cdot\dot{Z}_{2\pi}}{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}}$$

$$\dot{Z}_{1T}+\frac{\dot{Z}_{1\pi}\cdot\dot{Z}_{2\pi}}{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}} = \frac{\dot{Z}_{1\pi}\cdot\left(\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}\right)}{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}}$$

$$\dot{Z}_{2T}+\frac{\dot{Z}_{1\pi}\cdot\dot{Z}_{2\pi}}{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}} = \frac{\dot{Z}_{2\pi}\cdot\left(\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{3\pi}\right)}{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}}$$

Note le impedenze di un doppio bipolo a Pigreco

le impedenze del doppio bipolo equivalente a T sono

$$\dot{Z}_{1T} = \frac{\dot{Z}_{1\pi}\cdot\dot{Z}_{3\pi}}{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}}$$

$$\dot{Z}_{2T} = \frac{\dot{Z}_{2\pi}\cdot\dot{Z}_{3\pi}}{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}}$$

$$\dot{Z}_{3T} = \frac{\dot{Z}_{1\pi}\cdot\dot{Z}_{2\pi}}{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}}$$

Note le ammettenze di un doppio bipolo a Pigreco

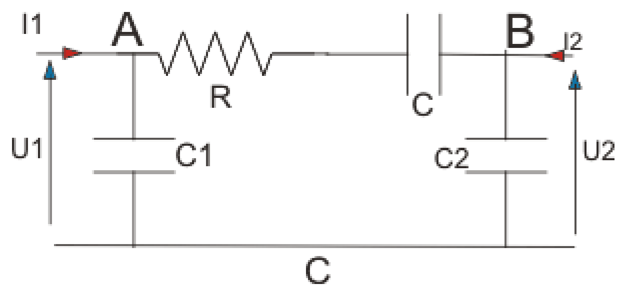
le ammettenze del doppio bipolo equivalente a T sono

$$\dot{Y}_{1T} = \frac{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}}{\dot{Z}_{1\pi}\cdot\dot{Z}_{3\pi}} = \dot{Y}_{1\pi}+\dot{Y}_{3\pi}+\frac{\dot{Y}_{1\pi}\cdot\dot{Y}_{3\pi}}{\dot{Y}_{2\pi}}$$

$$\dot{Y}_{2T} = \frac{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}}{\dot{Z}_{2\pi}\cdot\dot{Z}_{3\pi}} = \dot{Y}_{2\pi}+\dot{Y}_{3\pi}+\frac{\dot{Y}_{2\pi}\cdot\dot{Y}_{3\pi}}{\dot{Y}_{1\pi}}$$

$$\dot{Y}_{3T} = \frac{\dot{Z}_{1\pi}+\dot{Z}_{2\pi}+\dot{Z}_{3\pi}}{\dot{Z}_{1\pi}\cdot\dot{Z}_{2\pi}} = \dot{Y}_{1\pi}+\dot{Y}_{2\pi}+\frac{\dot{Y}_{1\pi}\cdot\dot{Y}_{2\pi}}{\dot{Y}_{3\pi}}$$

Le relazioni trovate ipotizzando grandezze sinusoidali valgono comunque anche per le impedenze ed ammettenze operatoriali, dipendenti cioè dalla variale complessa s, quindi per grandezze comunque variabili.



R=10 kohm

C=470 microfarad

C1=150 microfarad

C2=390 microfarad

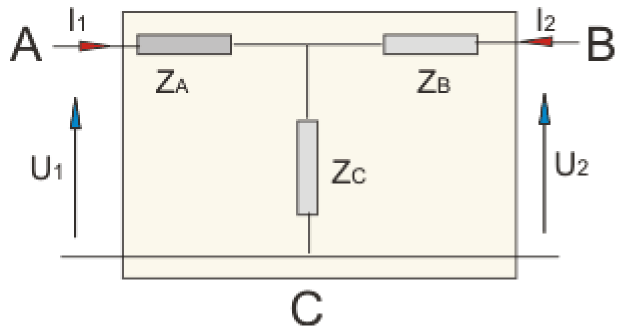
Si determinano le impedenee operatoriali

$$Z_{1\pi} = Z_{AC} = \frac{1}{sC_1}$$

$$Z_{2\pi} = Z_{BC} = \frac{1}{sC_2}$$

$$Z_{3\pi} = Z_{AB} = R + \frac{1}{sC} = \frac{1+sRC}{sC}$$

Si inerte per trovare le ammettenze corrispondenti, quindi si calcola la matrice delle ammettenze, si inverte la matrice delle ammettenze e si determinano le impedenze a T



$$Z_A = \frac{1418+6666 \cdot s}{1.136 \cdot s+s^2}$$

$$Z_A = \frac{545+2564 \cdot s}{1.136 \cdot s+s^2}$$

$$Z_A = \frac{1709}{1.136 \cdot s+s^2}$$

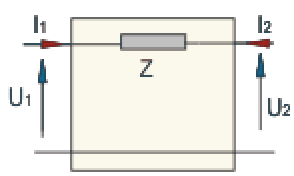
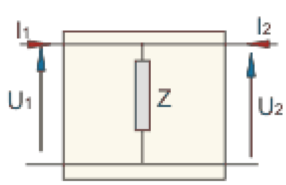
Il programma per i calcoli con Scilab

```
txt=['C1=';'C2=';'R=';'C=';];

DBP=evstr(x_mdialog('resistenze ed alimentazione',txt,['0.00015';'0.00039';'10000';'0.00047']));

//terna di impedenze a T

C1=DBP(1);

C2=DBP(2);

R=DBP(3);

C=DBP(4);

s=poly(0,"s");

ZAB=R+1/(s*C);

ZAC=1/(s*C1);

ZBC=1/(s*C2);

YAB=1/ZAB;
```

```
YAC=1/ZAC;

YBC=1/ZBC;

Y=[YAC+YAB, -YAB;-YAB,YBC+YAB]

Z=1/Y

ZA=Z(1,1)-Z(1,2)

ZB=Z(2,2)-Z(1,2)

ZC=Z(1,2)
```

Doppi bipoli degeneri

sono i bipoli per i quali non è possibile la matrice delle impedenze o delle ammettenze risulta indeterminata. E' invece possibile scrivere la matrice di trasmissione, come vedremo.

<table>
<tr><th colspan="2">Doppi bipoli degeneri</th></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>$\dot Z_{11}=\dot Z_{12}=\dot Z_{21}=\dot Z_{22}=\infty$</td></tr>
<tr><td>$\dot Y_{11}=-\dot Y_{12}=-\dot Y_{21}=\dot Y_{22}=\frac{1}{\dot Z}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>$\dot Y_{11}=\dot Y_{12}=\dot Y_{21}=\dot Y_{22}=\infty$</td></tr>
<tr><td>$\dot Z_{11}=-\dot Z_{12}=-\dot Z_{21}=\dot Z_{22}=\dot Z$</td></tr>
</table>