Isidoro KZ (IsidoroKZ)

CALCOLI SUI DIAGRAMMI DI BODE

7 February 2021

Introduzione

In questo articolo si descrive una semplice tecnica che ho imparato all'università per fare calcoli rapidi sui diagrammi di Bode asintotici. La tecnica, molto semplice da applicare, è estremamente utile, ma incredibilmente non sembra conosciuta in giro. L'ho solo vista spiegata su un libro di testo [1], da cui ho tratto un po' di materiale.

La seconda parte dell'articolo mostra invece come scrivere in modo leggibile le funzioni di trasferimento, evidenziando amplificazioni e frequenze. Un grande paladino di tecniche che permettono di scrivere le informazioni con una bassa entropia è stato il prof. Middlebrook, che in [2] mostra la tecnica che sarà illustrata qui.

Calcoli sui diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode, disegnati con l'approssimazione asintotica di segmenti rettilinei, sono un importante strumento per il progettista poiché consentono di tracciare velocemente il grafico di una funzione di trasferimento o di una impedenza senza perdere praticamente nessuna informazione. I diagrammi asintotici permettono anche di effettuare dei calcoli che fanno di solito risparmiare tempo quando si calcola una funzione di trasferimento.

Quando si analizza un circuito, al posto di sviluppare una funzione di trasferimento informa analitica, facendo un mare di conti e trovando il polinomio a numeratore e a denominatore, conviene invece calcolare separatamente la posizione dei poli e degli zeri della rete, ad esempio con il metodo illustato in [3], e il valore delle amplificazioni dei tratti orizzontali in cui gli elementi reattivi sono considerati cortocircuiti o circuiti aperti. Le proprietà dei tratti non orizzontali dei diagrammi di Bode asintotici, proprietà illustrate in questo articolo, permettono di "raccordare" i vari pezzi del diagramma asintotico evitando un po' di calcoli.

La dimostrazione di queste proprietà, che fa uso di quanto spiegato nella sezione sulla scrittura delle funzioni di trasferimento, si trova in **Appendice**.

Tratti con pendenza di $\pm 20\mathrm{dB/dec}$

La proprietà importante dei tratti conpendenza di $\pm 20\mathrm{dB/dec}$ dice che presi due *qualunque* punti sul tratto a pendenza di $\pm 20\mathrm{dB/dec}$, il rapporto fra i **fattori di amplificazione** (**non** i guadagni in **decibel**) dei due punti è uguale al rapporto delle frequenze degli stessi due punti.

In pratica l'espressione "pendenza di $\pm 20\mathrm{dB}/\mathrm{dec}$" è solo un modo complicato per dire che in quel tratto, il rapporto delle amplificazioni è direttamente o inversamente proporzionale al rapporto delle frequenze. Guardando il grafico si capisce immediatamente se la proporzione è diretta o inversa, senza stare a dover memorizzare due procedure diverse per tratti "in salita" o "in discesa".

Essendo possibili tratti a pendenza di $+20\ \mathrm{dB}/\mathrm{dec}$ o di $-20\ \mathrm{dB}/\mathrm{dec}$, è conveniente scrivere nel rapporto l'amplificazione maggiore A_H divisa per l'amplificazione minore A_L e porla uguale al rapporto fra frequenza maggiore f_H divisa per quella minore f_L. I pedici H e L stanno per High e Low, e non si riferiscono necessariamente allo stesso punto.

$$(1) \qquad \frac{A_H}{A_L} = \frac{f_H}{f_L}$$

I punti scelti possono essere ovunque sul segmento, inclusi i punti terminali in corrispondenza di zeri o poli. In Figura 1 si vede un esempio di identificazione di coppie di punti.

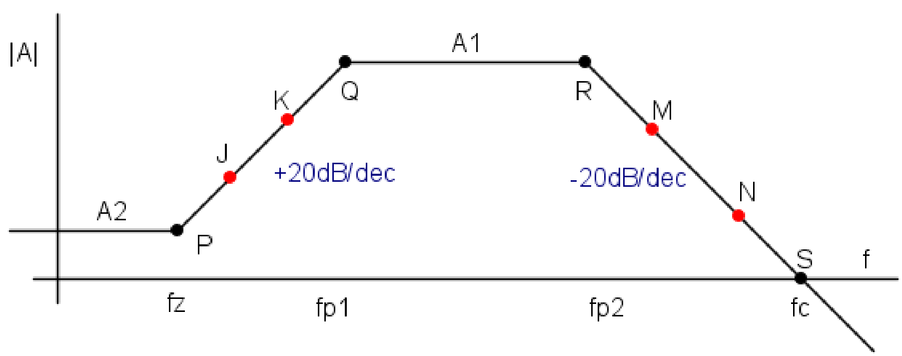

Figura 1 - Diagramma di Bode con pendenze di 20dB/dec

Ad esempio i punti J e K sono su un tratto con pendenza di $+20\ \mathrm{dB}/\mathrm{dec}$, per applicare la formula (1) bisogna osservare che il punto J è a frequenza minore e ha l'amplificazione minore, mentre K è a frequenza maggiore e ha anche l'amplificazione maggiore, quindi la formula (1) diventa

$$(2) \qquad \frac{A_K}{A_J} = \frac{f_K}{f_J}$$

Nel caso invece dei punti L ed M, la situazione è scambiata: L è a frequenza minore ma ha amplificazione maggiore, mentre M ha frequenza maggiore e amplificazione minore, quindi la formula (1) applicata a quella coppia di punti diventa

$$(3) \qquad \frac{A_M}{A_N} = \frac{f_N}{f_M}$$

I conti su due punti del tratto in pendenza non sembrano essere molto interessanti, ma le cose cambiano se si vanno a prendere i punti estremi di un intervallo.

Ad esempio nella coppia di punti $P - Q$ il punto P ha la frequenza inferiore e anche l'amplificazione inferiore, mentre Q si trova alla frequenza maggiore e ha anche l'amplificazione maggiore. Si osservi che l'amplificazione del punto P è A_2, mentre quella del punto Q è A_1, e la frequenza di P è f_z mentre quella di Q è f_{p2}, e queste sono quattro grandezze importanti nella funzione di trasferimento!

La proporzione che lega amplificazioni e frequenza dei due punti P e Q è quindi:

(4) $$\frac{A_Q}{A_P} = \frac{f_Q}{f_P} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{f_{p1}}{f_z}$$

Quando si calcola la funzione di trasferimento, non è necessario trovare le due amplificazioni e le due frequenza di polo e zero, basta trovarne tre e la quarta la si ricava con la proporzione (4). Tipicamente la frequenza dello zero può essere immediata da calcolare, oppure molto difficile. Nel primo caso si calcola lo zero e si ricava la frequenza del polo, nel secondo caso si calcola la frequenza del polo e si ricava quella dello zero.

Da ricordare che le amplificazioni devono essere prese come fattore, non in decibel!

Con questa proporzione, date tre delle quattro grandezze in gioco, si può facilmente calcolare la quarta, senza dover fare ulteriori calcoli sulla rete. Ad esempio avendo calcolato le due amplificazione A_1 e A_2 e conoscendo la frequenza del polo, si può calcolare la frequenza dello zero evitando ogni ulteriore calcolo sulla rete.

Nel tratto con pendenza di $-20\,\mathrm{dB/dec}$ si sono scelti i punti R ed S. Il punto R ha amplificazione A_1 e frequenza f_{p2}, mentre il punto S ha guadagno di $0\,\mathrm{dB}$, amplificazione pari a 1 ed è alla frequenza f_c di crossover. Questo caso viene trattato in modo solito, notando che il punto R ha l'amplificazione maggiore ma la frequenza minore. Se si conosce l'amplificazione A_1 e la frequenza del polo f_{p2} si può calcolare la frequenza del punto f_c che corrisponde all'amplificazione unitaria, anche detta prodotto guadagno banda:

(5) $$\frac{A_1}{1} = \frac{f_c}{f_{p2}} \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{A_1 f_{p2}}{1}$$

Il metodo appena presentato è un metodo *esatto* sui diagrammi asintotici. Sui diagrammi reali si hanno le stesse differenze che ci sono fra diagramma vero e diagramma asintotico, vale a dire $3\,\mathrm{dB}$ di differenza fra diagramma asintotico e diagramma vero in corrispondenza di ogni polo o zero reali.

Essendo un metodo esatto, queste differenze di $3\,\mathrm{dB}$ non si accumulano neanche con calcoli concatenati. Ad esempio conoscendo A_2, f_z ed f_{p1} si calcola immediatamente il valore dell'amplificazione A_1, che risulta esatta, anche se polo e zero sono molto vicini. Se poi si riutilizza A_1 così calcolato nell'espressione (5) per trovare f_c, il risultato viene esatto (sul diagramma asintotico).

Tratti con pendenza di $\pm n \cdot 20\mathrm{dB/dec}$

Nel caso di tratti con pendenze in salita o in discesa di$\pm n \cdot 20\mathrm{dB/dec}$, quindi pendenze di $\pm 40\mathrm{dB/dec}$ o $\pm 60\mathrm{dB/dec}$ la relazione diventa semplicemente

(6) $$\frac{A_H}{A_L} = \left(\frac{f_H}{f_L}\right)^n$$

con il solito caveat di usare il fattore di amplificazione e non il guadagno in decibel e non confondere i parametri "alti" H e quelli "bassi" L.

In pratica il rapporto delle amplificazioni diventa proporzionale al rapporto delle frequenze al quadrato per tratti con pendenza a $\pm 40\mathrm{dB/dec}$, oppure proporzionale al cubo del rapporto delle frequenza per tratti a $\pm 60\mathrm{dB/dec}$. Non mi è mai capitato di dover fare conti su pendenze maggiori, ma il procedimento è sempre lo stesso.

Esempi

Gli esempi illustrati in questa sezione coprono un ampio spettro di casi, mostrando la flessibilità del metodo di calcolo sui diagrammi di Bode. Il primo è un esercizio scolastico, assolutamente generico, seguono due esempi di analisi della stabilità amplificatori con operazionale, e si finisce con calcoli su filtri.

Esempio 1 - Esercizio scolastico

Data la funzione di trasferimento di Figura (2), in cui sono forniti i valori dei moduli di A_2 e A_m, e le frequenze di f_1, f_3 f_4 e f_5 calcolare le frequenze f_0, f_2, il modulo dell'amplificazione in corrispondenza al punto P e infine la frequenza f_6.

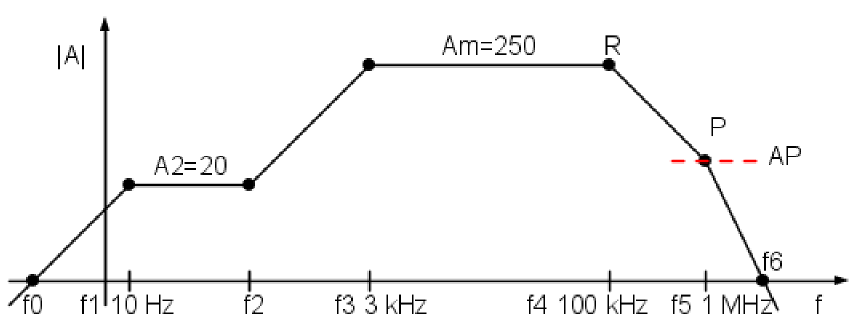

Figura 2 - Esempio di calcolo

La frequenza f_0 viene calcolata lavorando sul tratto con pendenza di $+20\,\mathrm{dB/dec}$ partendo dal polo a $10\,\mathrm{Hz}$, frequenza alla quale si conosce l'amplificazione $A_2 = 20$ (è un fattore, non decibel!). La frequenza f_0 è sull'asse a $0\,\mathrm{dB}$, quindi l'amplificazione a quella frequenza è unitaria. L'equazione (1) diventa

$$\frac{A_2}{1}=\frac{f_1}{f_0} \qquad \Rightarrow \qquad f_0=\frac{1\cdot f_1}{A_2}=\frac{10\mathrm{Hz}}{20}=0.5\,\mathrm{Hz}$$

La frequenza f_2 viene calcolata in modo analogo, lavorando sul tratto con pendenza $+20\,\mathrm{dB/dec}$ fra lo zero in f_2 e il polo in f_3. L'equazione (1) diventa

$$\frac{A_m}{A_2}=\frac{f_3}{f_2} \qquad \Rightarrow \qquad f_2=f_3\,\frac{A_2}{A_m}=3\mathrm{kHz}\,\frac{20}{250}=240\,\mathrm{Hz}$$

Il livello di amplificazione al punto P, indicato in Figura (2) come A_P lo si trova "scendendo" dal punto R al punto P lungo una discesa da $20\,\mathrm{dB/dec}$. Usando ancora l'equazione (1) si ha

$$\frac{A_m}{A_P}=\frac{f_5}{f_4} \qquad \Rightarrow \qquad A_P=A_m\,\frac{f_4}{f_5}=250\,\frac{100\mathrm{kHz}}{1\mathrm{MHz}}=25$$

Il guadagno vero, sul diagramma di Bode esatto, in corrispondenza del polo a $100\,\mathrm{kHz}$ è ovviamente $3\,\mathrm{dB}$ sotto il valore calcolato, ma questa differenza non comporta nessun errore nel calcolo della frequenza di crossover.

Conoscendo l'amplificazione in P, si trova la frequenza di crossover f_6 procedendo ulteriormente lungo una pendenza di $-40\,\mathrm{dB/dec}$. Questa volta bisogna usare l'equazione (6) che risulta quindi

$$\frac{A_P}{1}=\left(\frac{f_6}{f_5}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad f_6=f_5\sqrt{A_p}=1\mathrm{MHz}\times\sqrt{25}=5\,\mathrm{MHz}$$

Svolgendo il calcolo analitico sulla funzione di trasferimento completa (per fortuna ci sono i solutori simbolici e numerici), si ottiene che la frequenza di crossover vale $f_6=4.95\,\mathrm{MHz}$, close enough!

Esempio 2 - Stabilità di amplificatori operazionali

Gli amplificatori operazionali compensati internamente, molto comodi da usare, suggeriscono l'idea che siano sempre stabili e funzionino in qualunque circuito. Purtroppo ci sono dei casi in cui un operazionale compensato diventa instabile. Il calcolo sul diagramma di Bode permette di valutare l'instabilità di un circuito.

Il primo circuito è un inseguitore di tensione con carico capacitivo, per il quale calcoliamo il margine di fase e quindi la stabilità. Prendiamo come riferimento il circuito di figura 3, in cui si è già rappresentato l'operazionale con il suo circuito equivalente, trascurando la resistenza differenziale di ingresso. Il guadagno dell'operazionale ad anello aperto è riportato nel grafico, ed è il tipico guadagno di un operazionale compensato internamente, che presenta una amplificazione in continua molto elevata e un polo dominante a frequenza molto bassa. Alla frequenza di crossover si trova un secondo polo. Una analisi dettagliata del comportamento dei circuito del secondo ordine è in [4] sezione 5.

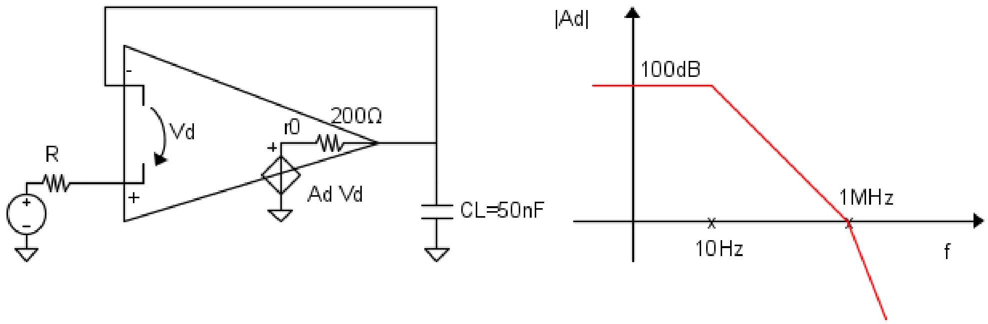

Figura 3 - Voltage follower con carico capaciivo

Per studiare la stabilità del circuito è necessario calcolare il guadagno di anello T del circuito, poi trovare la frequenza di crossover e quindi il margine di fase. In [4] è riportato in dettaglio il calcolo analitico, che qui invece si vuole evitare. Nel caso di operazionali, il rapporto di ritorno $T = Ab$ viene calcolato semplicemente trovando il fattore di retroazione e moltiplicandolo per il l'amplificazione dell'operazionale.

Il fattore di retroazione del circuito di Figura 3, è dato dal partitore fra la resistenza di uscita dell'operazionale r_o e la capacità di carico C_L. Il circuito è un semplice passa basso con amplificazione unitaria in banda e polo alla frequenza

$$f_p = \frac{1}{2\pi\, r_0 C_L} = \frac{1}{2\pi \times 200\Omega \times 50\mathrm{nF}} = 15.9\,\mathrm{kHz}$$

Conoscendo l'amplificazione a vuoto A_d e il fattore di retroazione b, si trova $T = A_d\, b$. La valutazione diventa molto semplice se si riportano le due funzioni asintotiche sul diagramma di Bode, perché avendo le ordinate espresse in decibel, quindi come logaritmo dell'amplificazione, il prodotto $A_d\, b$ diventa una semplice somma geometrica. In Figura (4) sono riportati in rosso il grafico di A_d, in azzurro b fattore di retroazione e in giallo $A_d\, b$ il rapporto di ritorno.

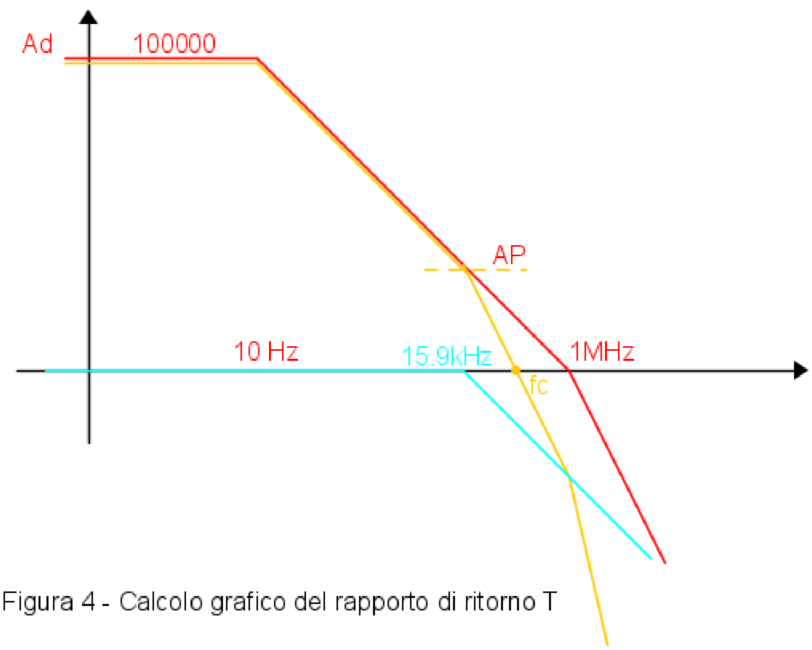

Figura 4 - Calcolo grafico del rapporto di ritorno T

Per tovare la frequenza di crossover f_c bisogna conoscere l'amplificazione A_P in corrispondenza del secondo polo del rapporto di ritorno. Il calcolo può essere fatto partendo dall'amplificazione in continua dell'operazionale, oppure dalla frequenza di crossover dell'operazionale e tornando indietro. Seguendo quest'ultimo percorso si scrive

$$\frac{A_P}{1} = \frac{1\text{MHz}}{15.9\text{kHz}} \qquad \Rightarrow \qquad A_P = 62.8$$

Da qui si parte lungo la funzione T gialla e si trova la frequenza di crossover ricordando che la pendenza della curva nel tratto interessato è di $-40\,\text{dB}/\text{dec}$, perciò

$$\frac{A_P}{1} = \left(\frac{f_c}{15.9\text{kHz}}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad f_c = \sqrt{62.8} \times 15.9\text{kHz} = 126\,\text{kHz}$$

Dalla frequenza di crossover si calcola poi la fase di T e il margine di fase.

$\angle T = -\arctan\frac{126\text{kHz}}{10\text{Hz}} - \arctan\frac{126\text{kHz}}{15.9\text{kHz}} - \arctan\frac{126\text{kHz}}{1\text{MHz}} = -180°$ e quindi il margine di fase è nullo! Abbiamo inventato un oscillatore! Questo circuito è il caso tipico quando si vuole dividere a metà una tensione per alimentare in duale un operazionale, e si aggiunge un operazionale in configurazione voltage follower e, *ad abundantiam* si mette anche un condensatore sull'uscita!

Un secondo esempio riguarda un amplificatore di transresistenza per un fotorivelatore. Il circuito è mostrato in Figura (5), l'amplificazione di transresistenza è di $2\,\text{M}\Omega$, la capacità di ingresso dell'operazionale e del fotodiodo sono modellate dalla capacità di $10\,\text{pF}$.

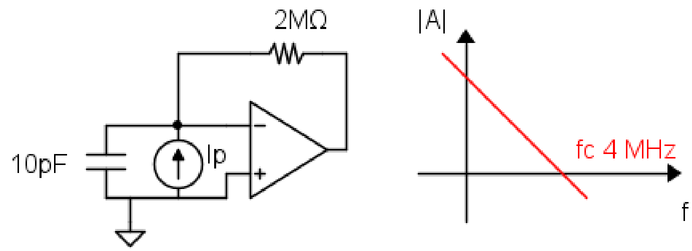

Figura 5 - Ampli fotorivelatore

l'operazionale è un normale opamp con ingresso a JFET, compensato internamente e con prodotto guadagno banda di $4\,\mathrm{MHz}$, che viene modellato con un semplice polo nell'origine. Nei conti a mano, il guadagno ad anello aperto di un operazionale può quasi sempre essere rappresentato con un polo nell'origine, senza stare a specificare il guadagno in continua e la frequenza del polo dominante, che comunque non sono noti con precisione, mentre è importante modellare il prodotto guadagno banda, che è invece un parametro controllato e garantito dal costruttore dell'integrato. Ulteriori poli, come nell'esempio precedente, spesso sono scomodi da calcolare, in prima battuta si possono trascurare, MA se ne deve comunque verificare l'effetto con conti più precisi o con una simulazione o un prototipo.

L'analisi della stabilità procede come fatto prima: si disegna sullo stesso diagramma di Bode l'amplificazione dell'operazionale e quella del fattore di retroazione, si valuta graficamente il guadagno di anello e si trova la sua frequenza di crossover f_c con la quale si calcola il margine di fase. La rete di retroazione, data dalla resistenza di retroazione e dalla capacità parassita forma un passa basso con frequenza del polo a $f_P = \dfrac{1}{2\pi \times 2\mathrm{M}\Omega \times 10\mathrm{pF}} \approx 8\,\mathrm{kHz}$. In Figura (6) sono riportati i relativi grafici.

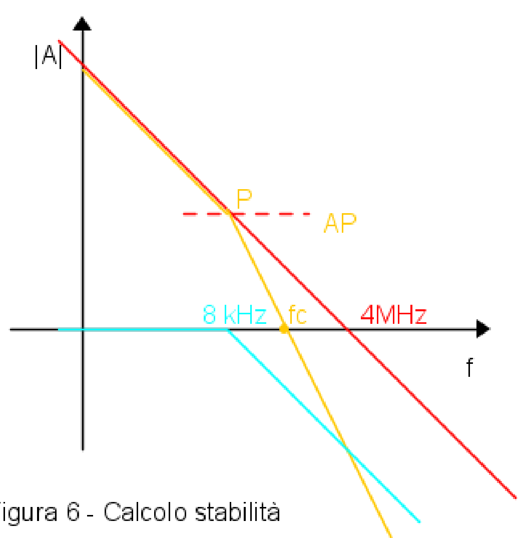

Figura 6 - Calcolo stabilità

Procedendo come nell'esempio precedente, si calcola l'amplificazione in corrispondenza del polo $A_P = \frac{4\text{MHz}}{8\text{kHz}} = 500$ e conoscendo la frequenza del polo e sapendo che la pendenza dopo il polo è di $-40\,\text{dB}/\text{dec}$ si ha che la frequenza di crossover vale $f_c = 8\text{kHz}\sqrt{500} = 178\,\text{kHz}$ e la fase di T in corrispondenza all'attraversamento dell'asse a $0\,\text{dB}$ vale

$$\angle T = -90° - \arctan\left(\frac{178\text{kHz}}{8\text{kHz}}\right) = -177.4°$$

e anche in questo caso il margine di fase è praticamente inesistente! Morale: gli operazionali "stabili" lo sono solo finché la rete di retroazione non introduce ritardi di fase!

Filtri semplici

Il metodo esposto per il calcolo rapido sui diagrammi di Bode serve anche a dimensionare i filtri di ordine basso e con semplici specifiche: basta disegnare sul diagramma di Bode la maschera richiesta e vedere come piazzare i poli oppure quale ordine di filtro serve. In realtà il progetto dei filtri è una operazione complicata che richiede valutazioni raffinate. Ma per filtri semplici di ordine basso se ne possono inizialmente stimare le prestazioni o le specifiche usando i conti sul diagramma di Bode.

Prendiamo come esempio un filtro passa basso in cui è richiesta una attenuazione di $35\,\text{dB}$, che corrisponde a una attenuazione di 56.2 volte alla frequenza di $10\,\text{kHz}$, e di voler cercare dove piazzare il polo di un filtro del primo ordine.

In Figura (7), in rosso, è rappresentato il diagramma di Bode di questo filtro del primo ordine

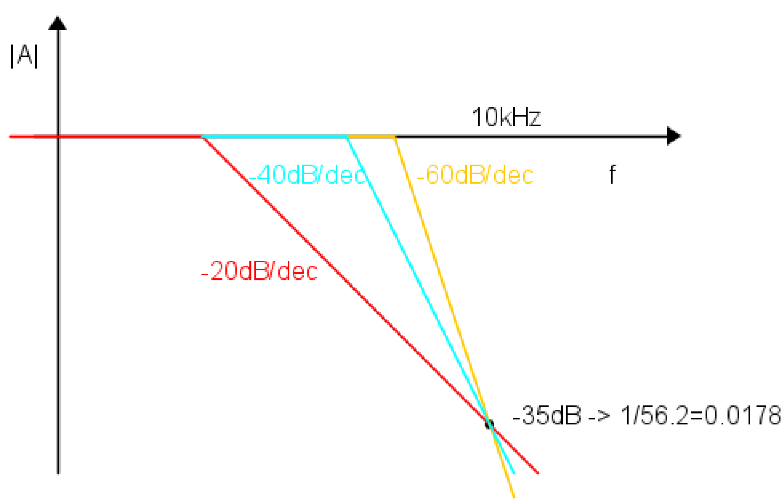

Figura 7 - Filtri di ordine 1, 2 e 3

Considerando che la pendenza data da un filtro del primo ordine (un solo polo) è di $-20\,\text{dB}/\text{dec}$, la frequenza di taglio f_t a $-3\,\text{dB}$ deve essere posta a

$$\frac{1}{1/56.2} = \frac{10\text{kHz}}{f_t} \qquad \Rightarrow \qquad f_t = \frac{10\text{kHz}}{56.2} = 177.8\,\text{Hz}$$

Se si sale al secondo ordine, Figura (7) curva azzurra, mettendo ad esempio come in un filtro di Butterworth due poli alla stessa frequenza, che coincide con la frequenza di taglio f_t, per ottenere la stessa attenuazione a $10\,\text{kHz}$ la frequenza dei poli complessi coniugati deve essere piazzata a

$$\frac{1}{1/56.2} = \left(\frac{10\text{kHz}}{f_t}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad f_t = \frac{10\text{kHz}}{\sqrt{56.2}} = 1.33\,\text{kHz}$$

La banda passante è notevolmente più larga della precedente. Infine se si vuole salire al terzo ordine, Figura (7) curva gialla, la frequenza dei tre poli di un filtro di Butterworth, che coincide con la frequenza di taglio f_t, viene calcolata dalla solita equazione (6) con $n = 3$

$$\frac{1}{1/56.2} = \left(\frac{10\text{kHz}}{f_t}\right)^3 \qquad \Rightarrow \qquad f_t = \frac{10\text{kHz}}{\sqrt[3]{56.2}} = 2.61\,\text{kHz}$$

La banda si è ulteriormente allargata rispetto ai casi precedenti. Bisogna ricordare che questa è solo una prima valutazione di massima, solo i filtri di Butterworth hanno tutti i poli coincidenti con la frequenza di taglio a $-3\,\text{dB}$. Altre famiglie di filtri con lo stesso ordine hanno diverse disposizioni di poli che, pur avendo sempre la stessa pendenza, possono comportare l'inizio della discesa più ripida (ad esempio Chebysheff), oppure più dolce (ad esempio Bessel).

Se le specifiche del filtro riguardano sia l'attenuazione che la banda passante, con un calcolo sul diagramma di Bode si può avere una idea dell'ordine necessario per il filtro. Ad esempio se la banda passante richiesta deve essere di $2\,\text{kHz}$ mantenendo sempre la stessa banda attenuata, si potrebbe usare la relazione (6) usando l'esponente come incognita. L'equazione esponenziale viene risolta con un paio di logaritmi e poi, considerando che l'ordine del filtro può solo essere intero, arrotondando all'intero superiore.

Ma si fa prima per tentativi: si parte dall'attenuazione richiesta, 56.2 volte e la si confronta con il rapporto di frequenze fra banda attenuata e passante, in questo caso $\frac{10\text{kHz}}{2\text{kHz}} = 5$ volte. Si passa a confrontare l'attenuazione con il rapporto delle frequenze, e si prova ad elevare il rapporto delle frequenze a pontenze intere finché questo valore supera l'attenuazione: l'esponente rappresenta il minimo ordine del filtro che potrebbe fornire l'attenuazione richiesta.

Il condizionale deriva dal fatto che alcune famiglie di filtri potrebbero richiedere un ordine superiore per ottenere l'attenuazione richiesta. Nel caso dell'esempio, confrontando attenuazione e rapporto delle frequenze si ha $56.2 > 5$: primo ordine non basta. Si prova con il secondo ordine $56.2 > (5)^2 = 25$, anche il secondo ordine non è suffciente. Continuando si ha $56.2 < (5)^3 = 125$: il terzo ordine potrebbe bastare.

In effetti con un filtro di Butterworth del terzo ordine si garantisce una attenuazione di almeno $35\,\text{dB}$ alla frequenza di $10\,\text{kHz}$ (l'attenuazione teorica è di $41\,\text{dB}$), mentre con un filtro di Bessel del terzo ordine l'attenuazione ottenuta a $10\,\mathrm{kHz}$ è solo di $33\,\mathrm{dB}$, quindi bisogna ancora salire di ordine.

Scrittura delle funzioni di trasferimento

Data una funzione di trasferimento in forma fattorizzata, è opportuno che questa sia scritta in modo da mettere in evidenza le sue caratteristiche importanti che sono l'amplificazione delle dei tratti orizzontali a guadagno costante, e le frequenze di poli e zeri. In questo modo si riesce a passare facilmente dalla funzione di trasferimento al diagramma di Bode asintotico, oppure, dato il diagramma di Bode, si può scrivere immediatamente la funzione di trasferimento. Bisogna sempre ricordare che nelle funzioni di trasferimento scritte in forma analitica, le amplificazioni sono fattori moltiplicativi, il cui valore è dato in "volte", non in decibel.

Si sceglie di usare come riferimento un tratto costante, orizzontale, del diagramma di Bode del modulo (livello di riferimento): tutti i poli a frequenza maggiore del tratto scelto come riferimento saranno rappresentati con una scrittura particolare detta *rappresentazione in alta frequenza*, gli altri, a frequenza minore dello stesso tratto, saranno *rappresentati in bassa frequenza*. Se una funzione ha più livelli costanti, vi saranno più rappresentazioni possibili, a seconda del livello scelto come riferimento.

Un polo o uno zero rappresentato in alta frequenza è normalizzato in modo da avere il termine noto unitario (polinomio antimonico), la rappresentazione in bassa frequenza invece può essere fatta normalizzando a 1 il coefficiente della variabile s (polinomio monico), oppure con rappresentazione invertita di poli e zeri. Le stesse regole di normalizzazione dei coefficienti si applicano per coppie di poli o zeri complessi coniugati da rappresentarsi in bassa o in alta frequenza.

Dato il diagramma di Bode di Figura (8), è possibile scrivere la relativa funzione di trasferimento mettendo in evidenza uno qualunque delle tre amplificazioni (in volte, non in decibel!) A_1, A_2 oppure A_3.

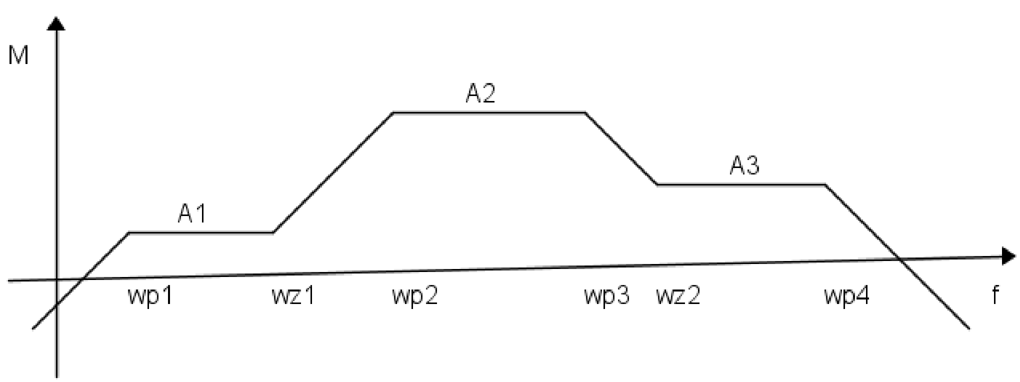

Figura 8 - Esempio di Funzione di Trasferimento

Nel primo caso il polo in ω_{p1} deve essere scritto con la rappresentazione in bassa frequenza e il relativo fattore tende a 1 quando $s \to \infty$, mentre le altre singolarità sono scritte in alta frequenza e quindi il fattore tende a 1 quando $s \to 0$.

$$A = A_1 \cdot \underbrace{\frac{s}{s+\omega_{p1}}}_{\text{Bassa freq.}} \cdot \underbrace{\frac{\frac{s}{\omega_{z1}}+1}{\frac{s}{\omega_{p2}}+1} \cdot \frac{\frac{s}{\omega_{z2}}+1}{\frac{s}{\omega_{p3}}+1} \cdot \frac{1}{\frac{s}{\omega_{p4}}+1}}_{\text{Alta frequenza}}$$

Il primo termine rappresenta lo zero nell'origine e il polo in ω_{p1} che sono in "bassa frequenza" rispetto al tratto di amplificazione A_1 preso come riferimento e quindi i polinomi sono monici, mentre i restanti poli e zeri sono rappresentati in "alta frequenza" e hanno i termini noti unitari. Da notare che questa funzione ha uno zero anche all'infinito che però in questa rappresentazione in "alta frequenza" non compare.

Il termine in bassa frequenza può anche essere scritto in forma invertita, usando come espressione della frequenza $\frac{\omega_p}{s}$ al posto della usuale $\frac{s}{\omega_p}$ Questo cambio di variabile fa ribaltare l'asse orizzontale, che è logaritmico, quindi la presenza di uno zero nell'origine non è più presente nella scrittura, analogamente allo zero all'infinito. La stessa funzione di prima viene quindi scritta come

$$A = A_1 \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\omega_{p1}}{s}+1}}_{\text{BF invert.}} \cdot \underbrace{\frac{\frac{s}{\omega_{z1}}+1}{\frac{s}{\omega_{p2}}+1} \cdot \frac{\frac{s}{\omega_{z2}}+1}{\frac{s}{\omega_{p3}}+1} \cdot \frac{1}{\frac{s}{\omega_{p4}}+1}}_{\text{Alta frequenza}}$$

Anche in questa forma rimangono evidenziati i parametri importanti, l'amplificazione A_1 (è un fattore moltiplicativo, non decibel!) e le frequenze di zeri e poli.

Quello che si fa, in pratica è considerare la banda in cui l'amplificazione vale A_1, come una banda a frequenza infinitamente maggiore di ω_{p1} e infinitamente minore delle frequenze degli altri poli e zeri. A prima vista potrebbe sembrare una approssimazione molto grossolana, ma va ricordato che per tracciare il diagramma di Bode si passa dalla variabile complessa s alla sua restrizione sull'asse immaginario $\mathrm{j}\omega$ e successivamente si calcola il modulo della funzione risultante. Nel campo complesso, il modulo di una singolarità (polo o zero) a ω_s è indicata come

$\left|\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_s}+1\right|$ e vale $\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2+1}$

Considerando questa espressione, si vede che quando si dice "frequenza molto maggiore" non significa una decade o piu`, come di solito si ha in ingegneria, ma basta una frequenza doppia per avere un errore dell' 11% sul modulo (meno di $1\ \mathrm{dB}$), il tutto grazie alla somma pitagorica. Da notare che quando si ha $\omega = \omega_s$ si è in corrispondenza del polo o dello zero e l'errore è di soli $3\ \mathrm{dB}$, la solita differenza fra diagramma asintotico e diagramma vero.

È quindi ragionevole assumere che i fattori al di sopra del tratto preso come riferimento vedano essenzialmente una frequenza nulla, mentre i fattori prima del livello di riferimento vedono una frequenza infinita,

Se si sceglie come livello di riferimento il tratto con amplificazione A_2, anche lo zero in ω_{z1} e il polo in ω_{p2} diventano singolarità da rappresentarsi in bassa frequenza e si ha:

$$A = A_2 \cdot \underbrace{\frac{s}{s+\omega_{p1}} \cdot \frac{s+\omega_{z1}}{s+\omega_{p2}}}_{\text{Bassa frequenza}} \cdot \underbrace{\frac{\frac{s}{\omega_{z2}}+1}{\frac{s}{\omega_{p3}}+1} \cdot \frac{1}{\frac{s}{\omega_{p4}}+1}}_{\text{Alta frequenza}}$$

Oppure usando la forma invertita per la parte in bassa frequenza si ha:

$$A = A_2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\omega_{p1}}{s}+1} \cdot \frac{\frac{\omega_{z1}}{s}+1}{\frac{\omega_{p2}}{s}+1}}_{\text{BF zeri e poli invertiti}} \cdot \underbrace{\frac{\frac{s}{\omega_{z2}}+1}{\frac{s}{\omega_{p3}}+1} \cdot \frac{1}{\frac{s}{\omega_{p4}}+1}}_{\text{Alta frequenza}}$$

Discorso analogo se si evidenzia il livello A_3 con le due possibili scritture

$$A = A_3 \cdot \underbrace{\frac{s}{s+\omega_{p1}} \cdot \frac{s+\omega_{z1}}{s+\omega_{p2}} \cdot \frac{s+\omega_{z2}}{s+\omega_{p3}}}_{\text{Bassa frequenza}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{s}{\omega_{p4}}+1}}_{\text{Alta freq.}}$$

$$A = A_3 \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\omega_{p1}}{s}+1} \cdot \frac{\frac{\omega_{z1}}{s}+1}{\frac{\omega_{p2}}{s}+1} \cdot \frac{\frac{\omega_{z2}}{s}+1}{\frac{\omega_{p3}}{s}+1}}_{\text{BF zeri e poli invertiti}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{s}{\omega_{p4}}+1}}_{\text{Alta freq.}}$$

La scrittura con poli e zeri invertiti ha dei vantaggi in termini di eleganza e leggibilità ma ha lo svantaggio di avere una frazione a tanti "piani" che nelle manipolazioni algebriche dà luogo a una maggiore probabilità di errore.

Se la funzione ha una amplificazione costante A_{DC} a partire dalla continua, scegliendo questa amplificazione A_{DC} come riferimento tutti i poli e gli zeri sono in alta frequenza. Se si sceglie un altro livello come riferimento si procede nel solito modo con i polinomi monici oppure con poli e zeri invertiti per le singolarità in bassa frequenza.

Appendice

La dimostrazione delle proprietà dei tratti in pendenza delle funzioni di trasferimento rappresentate in forma asintotica è molto semplice se si scrive la funzione con l'opportuna scelta della scrittura delle singolarità in alta o in bassa frequenza. Partiamo ad esempio la funzione di trasferimento rappresentata nel grafico di Figura (2), come visto nella sezione precedente, prendendo come riferimento il livello A_m. Al posto della variabile s e delle pulsazioni angolari ω , le funzioni di trasferimento si possono scrivere direttamente in frequenza, ricordando che si è sull'asse immaginario e quindi viene fuori anche una j

$$A = A_m \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{j}f}{\mathrm{j}f+f_1} \cdot \frac{\mathrm{j}f+f_2}{\mathrm{j}f+f_3}}_{\text{Bassa frequenza}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\mathrm{j}f}{f_4}+1} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{j}f}{f_5}+1}}_{\text{Alta frequenza}}$$

Consideriamo ora il tratto in salita fra le frequenze f_2 ed f_3. Scriviamo la funzione di trasferimento riferita al tratto in salita, quindi considerando il polo in f_3 in alta frequenza. In pratica si mette in evidenza la frequenza f_3 e si ottiene

$$A = \frac{A_m}{f_3} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{j}f}{\mathrm{j}f+f_1} \cdot \frac{\mathrm{j}f+f_2}{1}}_{\text{Bassa frequenza}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\mathrm{j}f}{f_3}+1} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{j}f}{f_4}+1} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{j}f}{f_5}+1}}_{\text{Alta frequenza}}$$

I termini in bassa frequenza si comportano asintoticamente come se $f \to \infty$, mentre quelli in alta frequenza come se $f \to 0$

$$A = \frac{A_m}{f_3} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{j}f}{\mathrm{j}f+f_1} \cdot \frac{\mathrm{j}f+f_2}{1}}_{f\to\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{\mathrm{j}f}{f_3}+1} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{j}f}{f_4}+1} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{j}f}{f_5}+1}}_{f\to 0} \simeq A_m \cdot \mathrm{j}\frac{f}{f_3}$$

Da cui si vede che il modulo dell'amplificazione è proporzionale alla frequenza e quando $f \to f_3$ l'amplificazione vale A_m, a meno dei soliti tre decibel che sul diagramma asintotico non si vedono.

Inoltre nei tratti con pendenza $\pm 20\,\mathrm{dB/dec}$, lontano dalle singolarità, la fase è $\pm 90°$. Il segno della fase non è legato al segno della pendenza, ci sono di mezzo eventuali zeri a destra e un possibile segno negativo di fronte a tutta la funzione di trasferimento.

Per i tratti con pendenza ad esempio di $40\,\mathrm{dB/dec}$ la dimostrazione è la stessa, basta prendere come banda di riferimento il tratto in cui si stanno facendo i conti. Ad esempio, sempre dalla Figura (2), per fare i conti oltre la frequenza f_5 tutte le singolarità si scrivono in bassa frequenza. In pratica si moltiplicano i denominatori in alta frequenza per le frequenze dei poli e si ha

$$A = A_m \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{j}f}{\mathrm{j}f+f_1} \cdot \frac{\mathrm{j}f+f_2}{\mathrm{j}f+f_3} \cdot \frac{f_4}{\mathrm{j}f+f_4} \cdot \frac{f_5}{\mathrm{j}f+f_5}}_{f\to\infty} \simeq A_m \frac{f_4 f_5}{\mathrm{j}f,\mathrm{j}f} = -A_m \frac{f_4 f_5}{f^2}$$

Si vede che in questo caso l'amplificazione è legato al quadrato della frequenza, in modo inverso, e che la fase, lontano dalle singolarità è di $0°$ oppure di $180°$, quindi l'amplificazione è un valore reale.

Bibliografia

[1] R. Jaeger, T. Blalock, Microelettronica, McGraw Hill, 5 ed. italiana, 2018.

[2] R. D. Middlebrook, Normal & Inverted Poles & Zeros, Cap. 3 dal corso Design-Oriented Analysis, 2007

[3] A. Hajimiri, Generalized Time- and Transfer-Constant Circuit Analysis, IEEE Trans. on Circ. and Syst. I, Vol. 57, No. 6, June 2010, pag.1105-1121

[4] Isidoro KZ, Note sparse sulla retroazione, ElectroYou Apr. 2020