Isidoro KZ (IsidoroKZ)

NOTE SPARSE SULLA RETROAZIONE

25 April 2020

0 - Sommario

Quelli che seguono sono dei vecchi appunti sparsi che avevo quando ero all'università, vengono riproposti in modo abbastanza fedele, con poche modifiche qua e là perché il docente (come tutti i docenti) non aveva le idee molto chiare e non sapeva bene quanto stesse dicendo. Non costituiscono una dispensa, e neanche una trattazione organica, ma evidenziano solo alcuni punti che per motivi vari avevano bisogno di una più dettagliata spiegazione. Ho anche aggiunto qualche riferimento ad articoli e post su EY. Suppongo che il mio docente non me ne vorrà perché è passato parecchio tempo e non è neanche più all'università.

La prima parte, senza alcuna introduzione alla retroazione negativa, passa subito a descriverne le proprietà classiche con il calcolo del rapporto di ritorno, mentre la seconda parte analizza i sistemi del primo e del secondo ordine, che sono i più comuni e che servono anche ad approssimare i sistemi reali più complicati. Essendo l'analisi svolta da un punto di vista sistemistico, non ci sono schemi dettagliati. Si usa il metodo di Rosenstark per valutare il rapporto di ritorno e i guadagni reali. Solo al termine si torna vagamente sul circuitale, quando si descrive il riconoscimento del tipo di retroazione.

1 - Generalità

La retroazione negativa applicata ad un amplificatore ne diminuisce il guadagno: questo prezzo, molto costoso quando gli amplificatori erano a tubi elettronici, ora che un operazionale costa meno di un caffè e guadagna 120 dB, è pagato ben volentieri per ottenere i vantaggi che la retroazione presenta.

- il guadagno retroazionato non dipende più (molto) dalle caratteristiche dell’amplificatore base (A), ma da quelle della rete di retroazione (b). Si desensibilizza il guadagno ad anello chiuso rispetto alla variazione del guadagno dell'amplificatore base, ma si sposta la dipendenza sulla rete di retroazione, che essendo però di solito formata da componenti passivi stabili e precisi migliora la stabilità del guadagno dell'amplificatore ad anello chiuso. Anche il punto di funzionamento a riposo viene stabilizzato dalla retroazione purché sia presente anche in continua.
- la banda passante dell’amplificatore retroazionato è più grande rispetto a quella dell’amplificatore base. Questa proprietà vale per sistemi a polo dominante, ed è solo un caso particolare del fatto che la retroazione negativa sposta i poli che il sistema aveva ad

anello aperto. Ci sono casi in cui la banda viene ridotta, ad esempio effetto Miller, oppure in cui l'amplificatore diventa instabile.
- vengono ridotte le non linearità dell'amplificatore base, diminuendo la distorsione armonica e di intermodulazione: anche questo punto può essere considerata come conseguenza della stabilizzazione del guadagno.
- sono ridotti i disturbi e rumori introdotti nell'anello di retroazione, con una attenuazione tanto maggiore quanto più i disturbi entrano vicino all'uscita e di solito le distorsioni armoniche, che possono essere considerate dei disturbi aggiunti, sono causate dall'ultimo stadio che lavora a livelli di segnale più elevati.
- Le impedenze di ingresso e di uscita vengono modificate (relazione di Blackman): questo permette di ottenere amplificatori con impedenze che si avvicinano maggiormente a quelle di un amplificatore ideale.

Gli svantaggi della retroazione negativa sono essenzialmente i seguenti (nulla di irreparabile)

- Il guadagno dell'amplificatore base A viene ridotto, spesso anche di molto. Al giorno d'oggi non è un problema poiché il guadagno costa pochissimo
- Il circuito retroazionato è più complicato da capire e progettare rispetto a uno ad anello aperto
- Conseguenza del punto precedente, se non si conosce quello che si sta facendo, è molto facile incorrere in instabilità

Ci sono degli ottimi docenti che ritengono che il solo vantaggio fondamentale della retroazione negativa sia la desensibilizzazione del guadagno ad anello chiuso, mentre gli altri punti siano conseguenze o si possano ottenere in altro modo. Ad esempio la dispensa [7] mostra in modo interessante la storia della retroazione e fa vedere come la desensibilizzazione sia considerabile essere la sola proprietà fondamentale.

Usando la notazione di Rosenstark [3, 4] l'amplificazione ad anello chiuso di un sistema retroazionato vale in generale:

$$A_F = A_\infty \frac{T}{1+T} + A_0 \frac{1}{1+T} = \frac{A_\infty T + A_0}{1+T} \qquad (1)$$

dove A_F è il guadagno reale del sistema retroazionato, A_∞ quello ideale (che si otterrebbe se l'amplificatore base avesse guadagno infinito), e A_0 il termine di *feed-thru*, causato ad esempio dalla bidirezionalità della rete di retroazione, ed è il guadagno che si osserverebbe azzerando l'amplificazione dell'amplificatore di base. La grandezza T è il rapporto di ritorno (*return ratio*), anche se svariati autori lo chiamano guadagno di anello (*loop gain*), benché in realtà sia diverso dal *return ratio* [1].

Il fattore $D = \dfrac{T}{1+T}$ indica di quanto si scosta il guadagno reale da quello ii ideale (supponendo $A_0 \approx 0$), e nel seguito sarà chiamato fattore di discrepanza. Nei circuiti con operazionali il valore di A_∞ è calcolato facilmente assumendo che l'ingresso invertente insegua la tensione di quello non invertente, e dipende esclusivamente dal valore dei componenti usati in retroazione. Nei circuiti con operazionali, e in genere in quelli in cui il rapporto di ritorno T è molto maggiore di 1, e il valore di A_0 è molto minore di 1, si trascura il secondo termine dell'equazione (1).

2 - Calcolo di T

Il rapporto di ritorno T può essere rigorosamente calcolato in modo algoritmico nei circuiti discreti seguendo il metodo suggerito da Rosenstark [3][4]. Nel caso di circuiti con operazionali può essere ancora facilmente valutato come $T = Ab$ dove il guadagno dell'operazionale A è fornito dal costruttore, mentre il valore b di retroazione è calcolato, dopo aver spento i generatori indipendenti, come tensione all'ingresso dell'operazionale dovuta alla tensione sul generatore dipendente di uscita dell'operazionale stesso.

Il metodo generale di Rosenstark, che non prevede di separare l'amplificatore base dalla rete di retroazione, è facilmente applicabile lavorando sul generatore dipendente dell'operazionale, come mostrato in figura 1.

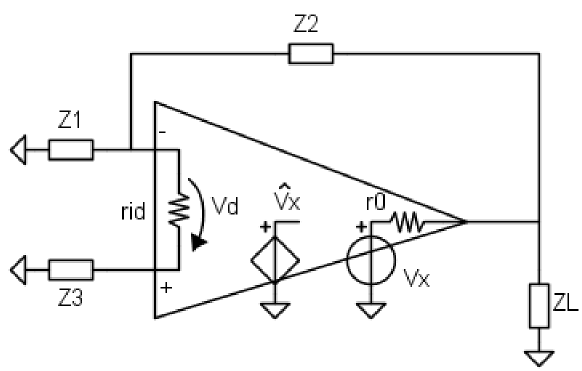


Figura 1 - Calcolo del rapporto di ritorno

Il generatore dipendente è sostituito con un generatore di prova dello stesso tipo e nello stesso verso V_x e il rapporto di ritorno è definito come:

$$T = -\frac{\hat{V}_x}{V_x} \qquad (2)$$

dove con $\hat{V}_x$, si è indicata la tensione che torna sul generatore dipendente, causata dal generatore di prova V_x che lo ha sostituito. Con questa convenzione di segno, quando T è positivo la retroazione è negativa. In alcuni testi la formula (2) non ha il segno negativo, qui si preferisce metterlo così da avere T positivo nel caso più comune di retroazione negativa.

Il legame fra la tensione di controllo V_d e la tensione del generatore dipendente è specificato dal costruttore: all'utente basta calcolare il rapporto fra tensione V_d e la tensione V_x, che la provoca: questo rapporto b è detto fattore di retroazione: $b = \dfrac{V_d}{V_x}$

Nel caso di figura 1 il fattore b può essere calcolato valutando l'impedenza vista da V_x, e tornando verso V_d applicando sistematicamente la regola del partitore di corrente. Altra possibilità, più comoda in caso di calcolo numerico, è di usare la *regula falsi* [6].

Il fattore b ha segno negativo perché la retroazione rientra sul lato negativo di V_d e il rapporto di ritorno

$$T = -\frac{\hat{V}_x}{V_x} = -\underbrace{\frac{\hat{V}_x}{V_d}}_{A} \times \underbrace{\frac{V_d}{V_x}}_{b} = -Ab \qquad (3)$$

usando la definizione della (2), è positivo e indica che la retroazione è negativa.

Nel seguito, per evitare di portarsi dietro tanti segni negativi, si userà $T = Ab$, togliendo anche il segno negativo a b. Questo non dà origine a confusione perché negli operazionali, dove si usa il prodotto separato dei due fattori A e b si sa che T deve essere positivo, mentre nei circuiti a discreti, non si separa l'amplificatore base dalla rete di retroazione si applica direttamente la (2), e in quel caso il segno negativo serve.

$$b = \frac{V_d}{V_x} = \frac{1}{\underbrace{r_0 + Z_L//(Z_2 + Z_1//(r_{id} + Z_3))}_{\text{Impedenza vista dal generatore } V_x}} \times$$
$$\times \underbrace{\frac{Z_L}{Z_L + Z_2 + Z_1//(r_{id} + Z_3)}}_{\text{Partitore di corrente con } Z_L} \times \underbrace{\frac{Z_1}{Z_1 + r_{id} + Z_3}}_{\text{Partitore su } Z_1} \times (r_{id}) \qquad (4)$$

Se la resistenza differenziale di ingresso dell'operazionale r_{id} è molto maggiore di Z_1 e di Z_3 (cosa abbastanza spesso vera), il valore di b calcolato in(4) si semplifica in:

$$b = \frac{1}{\underbrace{r_0 + Z_L//(Z_2 + Z_1)}_{\text{Impedenza vista da } V_x}} \times \underbrace{\frac{Z_L}{Z_L + Z_2 + Z_1}}_{\text{Partitore con } Z_L} \times (Z_1) \qquad (5)$$

Proseguendo nelle manipolazioni, se la rete di retroazione ha una impedenza molto superiore a quella del carico, è possibile ulteriormente semplificare la relazione precedente in:

$$b = \frac{Z_L}{r_0 + Z_L} \times \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad (6)$$

da cui si osserva che il fattore di retroazione è dato dal partitore (di tensione) fra r_0 e il carico Z_L moltiplicato per il rapporto di partizione fra Z_1 e Z_2. Sei nfine si suppone che $r_0 \ll Z_L$, cosa spesso vera, si ottiene la forma più semplice del fattore di retroazione (b semplificato):

$$b = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad (7)$$

A stretto rigore il calcolo del fattore di retroazione dovrebbe essere fatto usando la relazione (4), che però è di uso estremamente scomodo. L'uso della forma approssimata (7) è spesso corretto, poiché le ipotesi con cui è stata ricavata sono quasi sempre verificate. Una importante eccezione si ha tuttavia in caso di carico fortemente capacitivo, che insieme con r_0 introduce un polo in più in b, e quindi nel rapporto di ritorno. In questo caso è necessario usare almeno la (6) per valutare correttamente la stabilità del sistema.

Nei casi più comuni, il considerare $r_0 = 0$ e $r_{id} \to \infty$ porta a valutare un rapporto di ritorno lievemente maggiore di quello reale, e in genere ci si mette in una condizione più cautelativa di quella vera per quanto riguarda la stabilità.

Il reciproco del fattore b semplificato è il *noise gain* (guadagno di rumore), indicato con A_N e indica di quanto viene amplificato il rumore interno di tensione dell'operazionale. Il valore del noise gain in continua fornisce l'amplificazione della tensione di offset dell'operazionale: si osservi che la V_{off} può essere vista come un rumore in continua. Anche il *noise gain* è una forma di guadagno ideale: l'amplificazione effettiva subita dall'offset e dal rumore vale

$$A_{NF} = A_N \frac{T}{1+T} \qquad (8)$$

Il guadagno A_∞ è legato al fattore di retroazione b semplificato: ad esempio nell'amplificatore elementare non invertente $A_\infty = 1/b$, mentre nell'amplificatore elementare invertente $A_\infty = 1 - 1/b$: in altre topologie ancora la relazione è più complicata: è quindi più opportuno considerare come entità separate A_∞ e b, senza preoccuparsi di eventuali legami fra i due. Da notare ancora che A_∞, e *noise gain* sono uguali solo in qualche caso.

Il valore di A è sempre dipendente dalla frequenza, mentre il valore di b può dipendere dalla frequenza oppure no, a seconda che nella retroazione vi siano o meno componenti reattivi (eventualmente capacità parassite). In ogni caso il valore di T dipende dalla frequenza e di solito (tranne a frequenze bassissime) assume un valore complesso.

3 - Desensibilizzazione del guadagno

La ragione che ha portato all'invenzione della retroazione negativa è stata la necessità di stabilizzare il guadagno degli amplificatori telefonici degli anni '20 [2]. Per valutare la variazione del guadagno di un sistema retroazionato al variare dei parametri e dei valori dei componenti si parte dalla relazione del guadagno, trascurando il termine A_0

$$A_F = A_\infty \frac{T}{1+T} \qquad (9)$$

ricordando che A_∞ è funzione dei componenti della rete di retroazione, e $T = Ab$, dove A è il guadagno dell'amplificatore di base, e b è il fattore di retroazione, che approssimativamente dipende solo dai componenti passivi usati nella rete di retroazione. In realtà, il fattore di retroazione dipende anche dalle impedenze di uscita e di ingresso dell'amplificatore base. Per calcolare la variazione relativa di A_F si passa al logaritmo dell'espressione del guadagno e la si differenzia:

$$\ln(A_F) = \ln(A_\infty) + \ln(T) - \ln(1+T) \qquad (10)$$

$$\frac{\mathrm{d}A_F}{A_F} = \frac{\mathrm{d}A_\infty}{A_\infty} + \frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{\mathrm{d}T}{1+T} = \frac{\mathrm{d}A_\infty}{A_\infty} + \frac{\mathrm{d}T}{T(1+T)} \qquad (11)$$

e ricordando che $T = Ab$ si ha

$$\frac{\mathrm{d}A_F}{A_F} = \frac{\mathrm{d}A_\infty}{A_\infty} + \frac{b\,\mathrm{d}A}{Ab(1+T)} + \frac{A\,\mathrm{d}b}{Ab(1+T)} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}A_\infty}{A_\infty} + \left(\frac{\mathrm{d}A}{A} + \frac{\mathrm{d}b}{b}\right)\frac{1}{1+T} \qquad (12)$$

da cui si vede che una variazione relativa su A dà origine ad una variazione relativa su A_F ridotta di un fattore $1+T$: poiché in banda passante $|T| \gg 1$, le variazioni relative di A vengono attenuate. Le variazioni di b danno origine a due contributi: uno di piccola importanza, analoga alle variazioni di A, e un secondo più importante dovuto al fatto che A_∞ è una funzione di b. Le variazioni relative di A_∞, causate ad esempio da deriva dei componenti di retroazione, vengono riportate con la stessa entità su A_F: la retroazione sposta la sensibilità del sistema dall'amplificatore base alla rete di retroazione. Per valutare il legame fra le variazioni di A_F e quelle di b è necessario esprimere $\frac{\mathrm{d}A_\infty}{A_\infty}$ in funzione delle variazioni di b:

$$\frac{\mathrm{d}A_\infty(b)}{A_\infty(b)} = \frac{1}{A_\infty}\frac{\partial A_\infty}{\partial b}\mathrm{d}b \qquad (13)$$

le variazioni in funzione delle variazioni relative di b si ottengono moltiplicando e dividendo per b:

$$\frac{\mathrm{d}A_\infty}{A_\infty} = \frac{b}{A_\infty}\frac{\partial(A_\infty)}{\partial b}\frac{\mathrm{d}b}{b} \qquad (14)$$

Si fa notare en passant che le prime due frazioni a destra dell'uguale definiscono la sensibilità relativa di A_∞ rispetto ad b, normalmente scritta come $S_b^{A_\infty}$, come descritto in [8]. Le sensibilità, pur non essendo state esplicitamente tirate in ballo, rientrano comunque poiché sono lo strumento principale per descrivere come varia una grandezza al variare di un parametro.

Il legame fra A_∞ e b varia a seconda della topologia del circuito. Ad esempio in caso di amplificatore non invertente elementare $A_\infty = 1/b$. Sostituendo nell'espressione precedente si ha:

$$\frac{\mathrm{d}A_\infty}{A_\infty} = \frac{b}{1/b}\frac{\partial(1/b)}{\partial b}\frac{\mathrm{d}b}{b} = -\frac{\mathrm{d}b}{b} \qquad (15)$$

Questo significa che una variazione relativa su b viene portata con la stessa ampiezza e segno cambiato come variazione relativa di A_∞ e quindi su A_F.

Nel caso invece di amplificatore invertente elementare si ha $A_\infty = 1 - 1/b$, da cui

$$\frac{\mathrm{d}A_\infty}{A_\infty} = \frac{b}{1-1/b}\frac{\partial(1-1/b)}{\partial b}\frac{\mathrm{d}b}{b} = \frac{1-A_\infty}{A_\infty}\frac{\mathrm{d}b}{b} \qquad (16)$$

Queste espressioni servono solo a mostrare come la sensibilità alle variazioni venga spostata dall'amplificatore base alla rete di retroazione. Nella pratica non vengono mai usate per valutazioni quantitative poiché:

- le variazioni dell'amplificatore base sono di solito così grandi da rendere molto impreciso il calcolo fatto con i differenziali
- le variazioni dei componenti costituenti la rete di retroazione vengono trattate con le sensitivity che le legano direttamente al valore di A_∞, senza passare per b.

Il progetto di un sistema retroazionato consiste per lo più nel fare in modo di avere un A_∞, che soddisfaccia le richieste e ottenere un fattore di discrepanza $D = \dfrac{T}{1+T}$ sia prossimo a 1 con la tolleranza richiesta fino alla frequenza voluta.

4 - Sistemi retroazionati del primo ordine

Un sistema retroazionato del primo ordine, cioè con un solo polo nel rapporto di ritorno, è una approssimazione di un amplificatore con operazionale modellato con un solo polo e retroazione resistiva. La maggior parte degli operazionali compensati internamente usati in amplificatori con guadagno abbastanza maggiore di 1 possono essere ragionevolmente trattati come sistemi del primo ordine, poiché il secondo polo dell'operazionale cade a frequenze per le quali $|T| \ll 1$.

4.1 Caso generale

Si supponga di avere un amplificatore base con funzione di trasferimento

$$A(s) = \frac{A_{DC}}{1+\frac{s}{\omega_1}} \qquad (17)$$

avente cioè un guadagno in continua pari ad A_{DC} e un polo alla pulsazione ω_1, come in figura 2a.

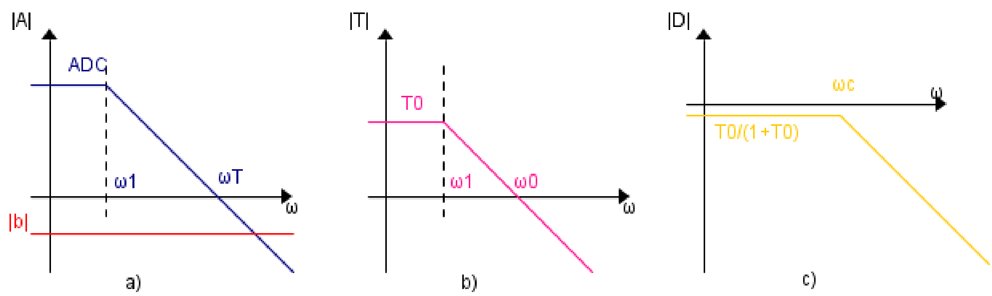


Figura 2. Sistema del primo ordine - Caso generale

Si retroazioni questo amplificatore con una rete puramente resistiva, cioè con fattore di retroazione b reale e costante, sempre in Figura 2a. Il rapporto di ritorno vale

$$T(s) = A(s)b = \frac{A_{DC}b}{1+\frac{s}{\omega_1}} = \frac{T_0}{1+\frac{s}{\omega_1}} \qquad (18)$$

e graficamente se ne ottiene il modulo sommando i grafici di $|A|$ e di $|b|$ ed ha il crossover alla frequenza ω_0, come mostrato in figura 2b.

Si ottiene analiticamente il guadagno del sistema ad anello chiuso usando la relazione

$$A_F = A_\infty \frac{T}{1+T} = A_\infty D \qquad (19)$$

dove A_∞ è un valore reale, avendo considerato un fattore di retroazione costante in frequenza, e le singolarità sono date solo dal fattore di discrepanza D, che nel caso specifico vale

$$D = \frac{\frac{T_0}{1+\frac{s}{\omega_1}}}{1+\frac{T_0}{1+\frac{s}{\omega_1}}} = \frac{T_0}{1+T_0} \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_1(1+T_0)}} \qquad (20)$$

da cui si osserva che il fattore di discrepanza (e quindi il sistema retroazionato) ha un polo alla pulsazione $\omega_c = \omega_1(1+T_0)$, e prima di questo polo il fattore di scostamento fra A_∞ e A_F

vale $T_0/(1+T_0)$. Per ottenere una buona precisione su A_F è necessario garantire che T sia sufficientemente elevato nella banda di interesse.

Nel caso particolare in cui $A_\infty = 1/b$, amplificatore non invertente elementara, il prodotto fra guadagno e banda ottenuta è costante:

$$\begin{aligned} A_F\,\omega_c &= A_F\,\omega_1(1+T_0) = A_\infty \frac{T_0}{1+T_0}\omega_1(1+T_0) = \\ &= \frac{1}{b}\frac{A_{DC}b}{1+T_0}\omega_1(1+T_0) = A_{DC}\,\omega_1 = \omega_T \qquad (21) \end{aligned}$$

ed è pari alla frequenza di transizione ω_T (detto anche prodotto guadagno banda, GBW o GBP), alla quale il modulo di $A(s)$ vale 1.

Ad esempio un operazionale con prodotto guadagno banda di 1 MHz che sia fatto lavorare in configurazione di amplificatore elementare non invertente, con un guadagno di +50 ha una banda approssimativamente pari a

$$\omega_c = \frac{\omega_T}{A_\infty} = 20\,\mathrm{kHz}$$

Nel caso in cui A_∞ sia diverso da $1/b$ (tutti i casi tranne l'amplificatore non invertente elementare) la banda ottenuta è più piccola rispetto a quella valutata precedentemente. La posizione del polo ω_c, cioè la banda ottenuta, vale in generale

$$\omega_c = \omega_1(1+T_0) = \omega_1(1+A_{DC}b) = \omega_1 + \omega_1 A_{DC}b \approx \omega_T b \qquad (22)$$

Nel caso di amplificatore invertente elementare il legame fra amplficazione ideale e fattore di retroazione vale $A_\infty = 1 - 1/b$ e la banda passante risulta

$$\omega_c = \frac{\omega_T}{1-A_\infty} \qquad (23)$$

che per elevati valori di guadagno invertente dà praticamente gli stessi risultati dell'espressione precedente, mentre per bassi valori di $|A_\infty|$ mostra che l'amplificatore invertente ha una banda minore, a parità di operazionale usato, rispetto all'amplificatore non invertente con lo stesso guadagno in modulo.

Ad esempio l'amplificatore precedente fatto guadagnare +1 (voltage follower) ha banda pari a 1 MHz, mentre fatto guadagnare -1 (configurazione invertente elementare) ha banda di 500 kHz. Nelle relazioni precedenti si è sempre trascurato l'effetto della resistenza di uscita r_0 dell'operazionale e di quella di ingresso r_{id}, che potrebbero entrare nella valutazione della banda. Anche l'effetto di *feed-through* attraverso la rete di retroazione è stato trascurato.

4.2 Caso semplificato

In caso di operazionali reali il guadagno in continua A_{DC} (comunque sempre molto elevato) e la frequenza ω_1 del primo polo sono estremamente mal determinati, in quanto dipendono da parametri parassiti dei transistori (tipicamente da r_o, dal β_o ecc.). Il prodotto guadagno banda $\omega_T = A_{DC}\,\omega_1$ è però approssimativamente costante anche al variare dei parametri parassiti, poiché, per operazionali convenzionali, vale g_{m1}/C_p; dove g_{m1}, transconduttanza del primo stadio, dipende dalla corrente di polarizzazione dello stadio e C_p è il condensatore di compensazione messo a cavallo del secondo stadio dell'operazionale (compensazione di Miller a polo dominante).

Il rapporto di ritorno T in questi casi presenta un polo a frequenza ω_1 molto bassa e una frequenza di transizione $\omega_0 = \omega_1 T_0$. Nei sistemi con operazionali $T_0 \gg 1$, ovvero $\omega_0 \gg \omega_1$ di svariati ordini di grandezza: in corrispondenza del crossover il primo polo ha già dato tutto il suo contributo alla pendenza del guadagno e alla fase. Poiché per lo studio della stabilità è importante solo il punto di crossover, si può supporre che il primo polo sia a frequenza zero, modellando la risposta dell'operazionale come un integratore (Fig. 3a)

$$A(s) = \frac{\omega_T}{s} \qquad (24)$$

dove si è messo in evidenza solo ω_T, cioè il prodotto guadagno banda dell'operazionale.

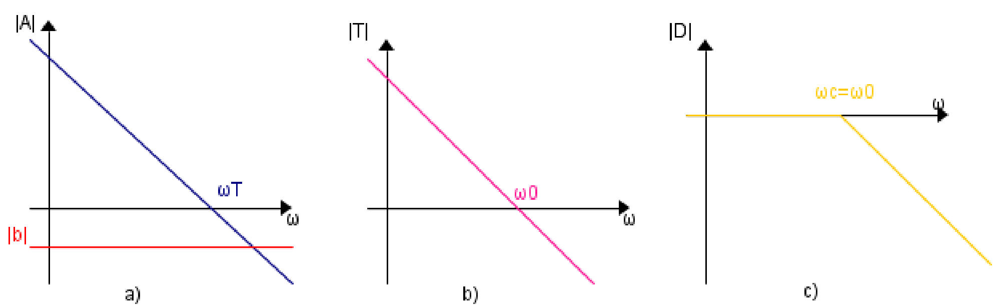


Figura 3. Sistema del primo ordine - Caso semplificato

Questa scrittura presenta il vantaggio di essere più semplice e di non usare parametri di valore incerto come A_{DC} e ω_1. Con questo modello, aggiungendo un fattore di retroazione reale b, Fig. 3a, il rapporto di ritorno vale $b\,\omega_T/s = \omega_0/s$, (Fig. 3b) dove si è indicato con $\omega_0 = \omega_T b$ la frequenza di crossover di T. Il fattore di discrepanza vale (Fig. 3c)

$$D = \frac{T}{1+T} = \frac{b\frac{\omega_T}{s}}{1+b\frac{\omega_T}{s}} = \frac{1}{1+\frac{s}{b\omega_T}} = \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_0}} \qquad (25)$$

da cui si vede che il sistema retroazionato presenta un polo alla frequenza

$$\omega_c = \omega_T b = \omega_0 = \frac{\omega_T}{A_N} \qquad (26)$$

Anche in questo caso valgono le osservazioni precedenti circa il legame fra A_∞ e b, e la banda ad anello chiuso in funzione del guadagno. Si osservi infine che in continua non si ha differenza fra A_F e A_∞, poiché si usa un modello di operazionale che a frequenza nulla ha guadagno infinito.

5 - Sistemi retroazionati del secondo ordine

I sistemi retroazionati del secondo ordine rappresentano un caso più complicato del precedente e modellano in modo abbastanza preciso una gran quantità di circuiti reali in cui si hanno ad esempio retroazioni con termini reattivi, oppure quando vengono usati operazionali compensati esternamente in modo da sfruttare al massimo la banda disponibile, oppure ancora in generale quando si è in presenza di un polo ulteriore oltre a quello dominante di compensazione dell'operazionale.

I sistemi del secondo ordine possono essere studiati in modo generale, o scrivendo il rapporto di ritorno T come valore in continua T_0 con due poli, come fatto ad esempio in [5, p. 579].

Negli amplificatori con operazionali, a causa dell'usuale elevato valore di T_0, determinato dal fatto che il primo polo si trova a frequenza molto inferiore a quella di crossover, si può usare una approssimazione analoga a quella usata nella sezione precedente: il primo polo è considerato a frequenza nulla, mentre il secondo si trova a frequenza ω_2. Il rapporto di ritorno risulta quindi

$$T(s) = \frac{\omega_0}{s}\,\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_2}} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0}\left(1+\frac{s}{\omega_2}\right)} \qquad (27)$$

dove ω_0 rappresenta la frequenza di crossover del primo tratto della curva di di $|T|$ (Fig. 4a). Anche se il polo ad ω_2 cade prima del crossover, il parametro ω_0 mantiene sempre lo stesso significato (Fig. 4b).

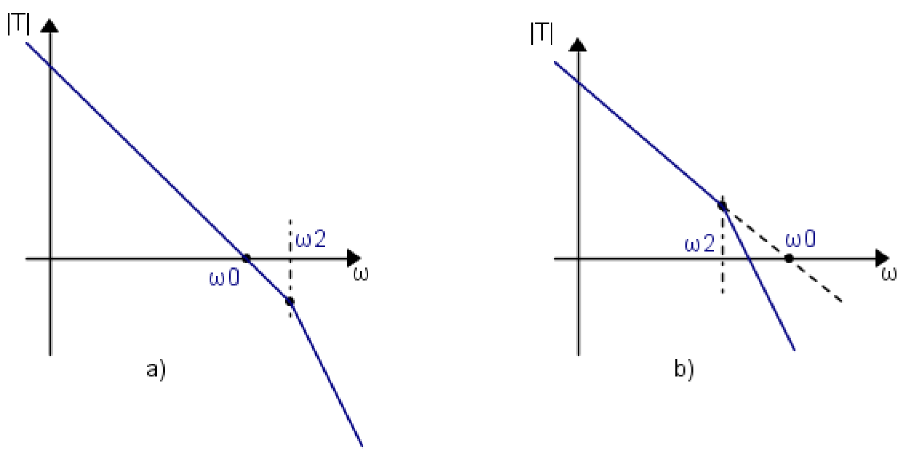


Figura 4. Due esempi di T del secondo ordine

Il fattore di discrepanza che si ha con questo rapporto di ritorno vale

$$D = \frac{T}{1+T} = \frac{1}{1+\frac{1}{T}} = \frac{1}{1+\frac{s}{\omega 0}+\frac{s^2}{\omega 0 \omega 2}} \qquad (28)$$

in cui si riconosce una funzione passa basso del secondo ordine, che nel caso generico è scritta come

$$\frac{1}{1+\frac{s}{Q\omega_c}+\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2} \qquad (29)$$

dove Q è il fattore di qualità del sistema e determina se i poli sono reali distinti ($Q < 0.5$), reali coincidenti ($Q = 0.5$) oppure complessi coniugati($Q > 0.5$). Il termine ω_c rappresenta la pulsazione dei poli se questi sono reali coincidenti o complessi coniugati, oppure la media geometrica delle pulsazioni dei due poli, se questi sono reali distinti. In quest'ultimo caso non si hanno particolari vantaggi nello scrivere la funzione del secondo ordine in funzione di Q e ω_c.

Identificando i parametri fra le due relazioni precedenti si ottiene

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0 \omega_2} \qquad (30)$$

$$Q = \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_2}} \qquad (31)$$

Se il secondo polo cade ad una frequenza abbastanza maggiore di ω_0 e quindi il crossover è praticamente ad ω_0, come in Fig. 4a, si hanno due poli reali distinti, mentre se $\omega_2 < 4\omega_0$, i poli sono complessi coniugati, e la frequenza di crossover di T si allontana da ω_0. Se il secondo polo cade all'incirca in corrispondenza del crossover (e questo è un caso abbastanza comune per sistemi correttamente compensati), si ha un Q approssimativamente unitario.

In caso di poli complessi coniugati, la risposta nel tempo ad un gradino applicato all'ingresso presenta in uscita delle oscillazioni parassite smorzate (*ringing*), di frequenza diversa dalla frequenza dei poli complessi coniugati. La frequenza del *ringing* ω_r è sempre minore di ω_c per il motivo mostrato in Fig. 5, vale

$$\omega_r = \omega_c \sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \qquad (32)$$

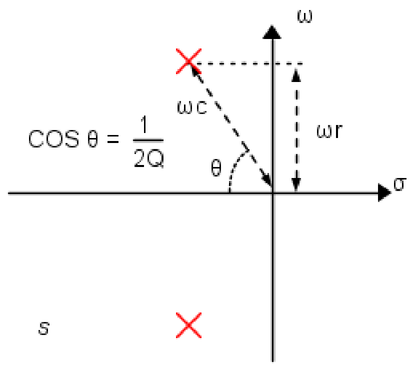
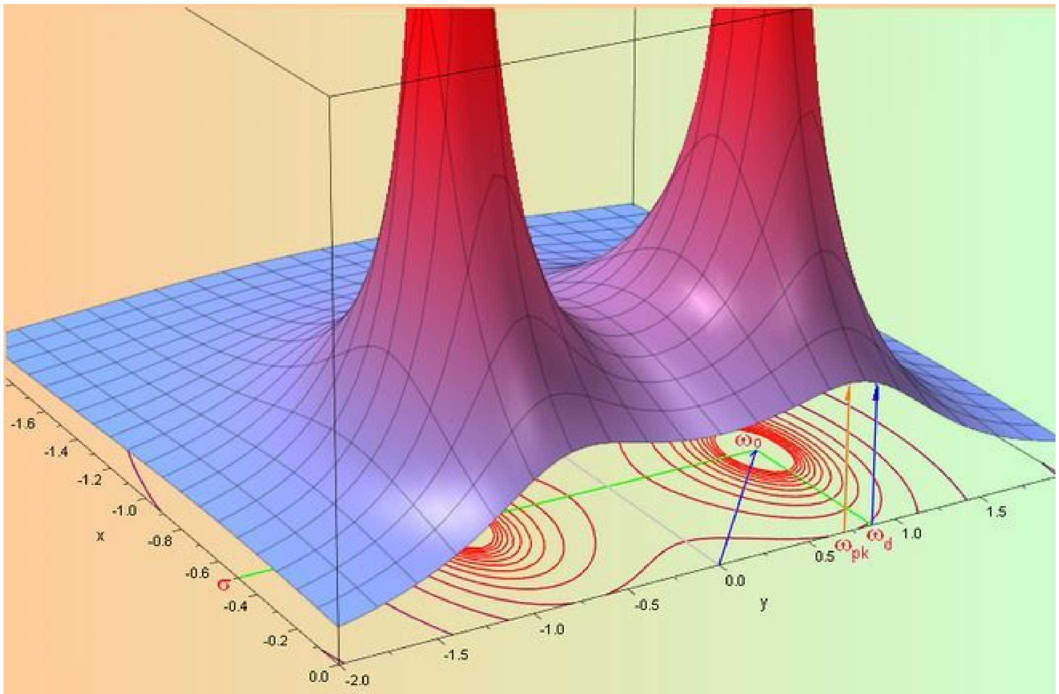


Figura 5. Poli complessi coniugati e significato di ωc ed ωr

Nel dominio della frequenza il fattore di discrepanza D di un sistema del secondo ordine presenta un picco se $Q > \sqrt{0.5}$. Il picco di risonanza è alla frequenza

$$\omega_{pk} = \omega_c \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \qquad (33)$$

La frequenza del picco è minore della frequenza di ringing poiche' il polo nell'altro semipiano contribuisce ad alzare il guadagno in modo asimmetrico, come si vede nella Fig. 6, che rappresenta il modulo di due poli complessi coniugati. La frequenza del picco è indicata da ω_{pk} quella di ringing da ω_d mentre ω_0 in questa figura indica la frequenza dei poli. La figura è stata generata da **RenzoDF**.



pulsazioniCM.jpg

Fig. 6 - Definizioni delle frequenze nei sistemi del secondo ordine

L'altezza del picco vale

$$|D(\mathrm{j}\omega_{pk})| = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}} \qquad (34)$$

come mostrato in Fig. 7. In corrispondenza di ω_c il valore del modulo del fattore di discrepanza è $|D(\mathrm{j}\omega_c)| = Q$.

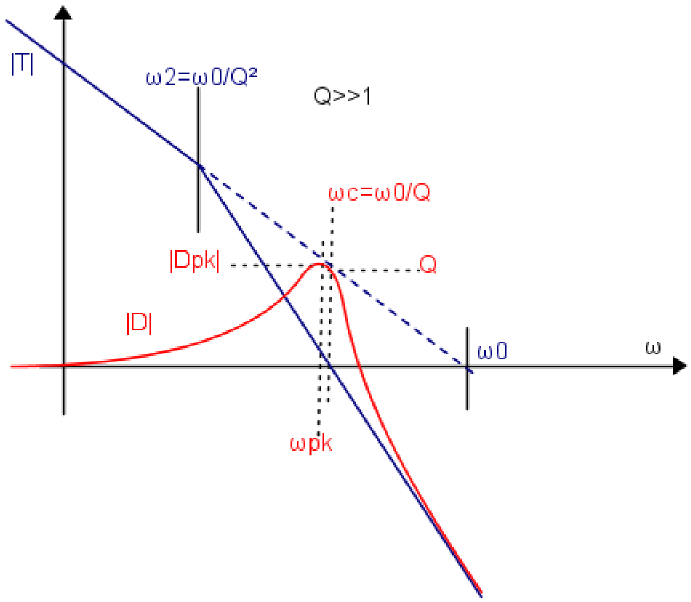


Figura 7 - Risposta di due poli complessi coniugati

È possibile legare il margine di fase φ_M del sistema retroazionato al Q risultante e alle frequenza ω_0 e ω_2. I calcoli non possono essere fatti sul diagramma di Bode, poiché in prossimità del polo il diagramma vero si scosta da quello asintotico.

Ad esempio se $\omega_0 = \omega_2$, ragionando su di un diagramma asintotico si potrebbe dire che la frequenza di crossover ω_M vale ω_0, mentre in realtà è inferiore, come si vede in Fig. 8.

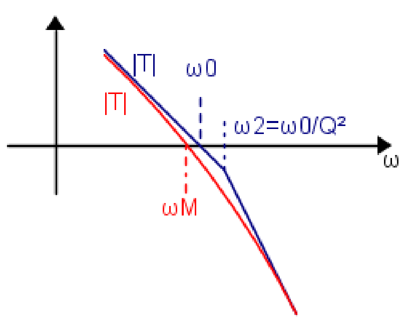


Figura 8 - Crossover vero (rosso) e asintotico (blu)

Il calcolo del valore della frequenza di crossover ω_M si effettua imponendo $|T(\mathrm{j}\omega_M)| = 1$ e, dopo tanta algebra noiosa, si ottiene

$$\omega_M = \omega_2 \sqrt{\frac{\sqrt{4Q^4+1}-1}{2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\sqrt{4Q^4+1}-1}{2Q^4}} \qquad (35)$$

A questa frequenza la fase di T è data dal polo nell'origine che provoca un ritardo di fase di $90°$, più il ritardo dovuto al polo in ω_2. Il margine di fase vale quindi:

$$\varphi_M = 180° \left(-90° - \arctan\left(\frac{\omega_M}{\omega_2}\right)\right) = \arctan\sqrt{\frac{2}{\sqrt{4Q^4+1}-1}} \qquad (36)$$

Invertendo questa relazione (altra buona dose di algebra) si ha il Q di un sistema in funzione del margine di fase φ_M

$$Q = \frac{\sqrt{\cos(\varphi_M)}}{\sin(\varphi_M)} \qquad (37)$$

6 - Sistemi generici

Se il rapporto di ritorno non è conosciuto in modo analitico, o è solo approssimativamente riconducibile a un sistema del primo o del secondo ordine, è ancora possibile prevedere il comportamento del sistema nell'intorno della frequenza di crossover ω_M del rapporto di ritorno, questo grazie al fatto che è relativamente semplice misurare la frequenza di crossover vera ω_M e il relativo margine di fase φ_M.

Il fattore di discrepanza può presentare a questa frequenza un picco di guadagno, la cui altezza dipende dal margine di fase del sistema. Il valore di $|D|$ è calcolato esprimendo T in modulo e fase:

$$T = |T|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle T} \qquad (38)$$

da cui il fattore di discrepanza vale

$$D = \frac{T}{1+T} = \frac{1}{1+\frac{1}{T}} = \frac{1}{1+\frac{1}{|T|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\angle T}} \qquad (39)$$

Il calcolo del modulo può essere fatto usando il teorema di Carnot ragionando sul triangolo formato dal vettore 1 e $\dfrac{1}{|T|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\angle T}$, oppure con le normali regole del calcolo complesso.

Procedendo per via analitica, il modulo di D in generale è dato da:

$$|D| = \left|\frac{1}{1+\frac{1}{|T|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\angle T}}\right| = \left|\frac{1}{1+\frac{1}{|T|}\cos\angle T - \mathrm{j}\frac{1}{|T|}\sin\angle T}\right| \qquad (40)$$

Tenendo presente le proprietà delle funzioni trigonometriche si ha:

$$|D| = \frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{|T|}\cos\angle T)^2 + \frac{1}{|T|^2}\sin^2\angle T}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{|T|^2}+\frac{2}{|T|}\cos\angle T}} \qquad (41)$$

In corrispondenza della frequenza di crossover si ha $|T| = 1$, e il modulo di D può essere facilmente valutato conoscendo la fase di T solo alla frequenza di crossover, indipendentemente dalla posizione di zeri o poli in T.

La fase del rapporto di ritorno quando $|T| = 1$ è legata al margine di fase $\varphi_M = 180° + \angle T$. Il valore che si trova per $|D|$ varrà solo per la frequenza di crossover, e in genere non sarà né il valore massimo di $|D|$ né corrisponderà alla frequenza dei poli ($\omega_M \neq \omega_{pk} \neq \omega_c$), come mostrato in figura 9, dove per comodità si è rappresentato un sistema del secondo ordine.

$$|D(j\omega_M| = \frac{1}{\sqrt{1 + 1 + 2\cos\angle T}} = \frac{1}{\sqrt{2 - 2\cos\varphi_M}} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{\varphi_M}{2}\right)} \qquad (42)$$

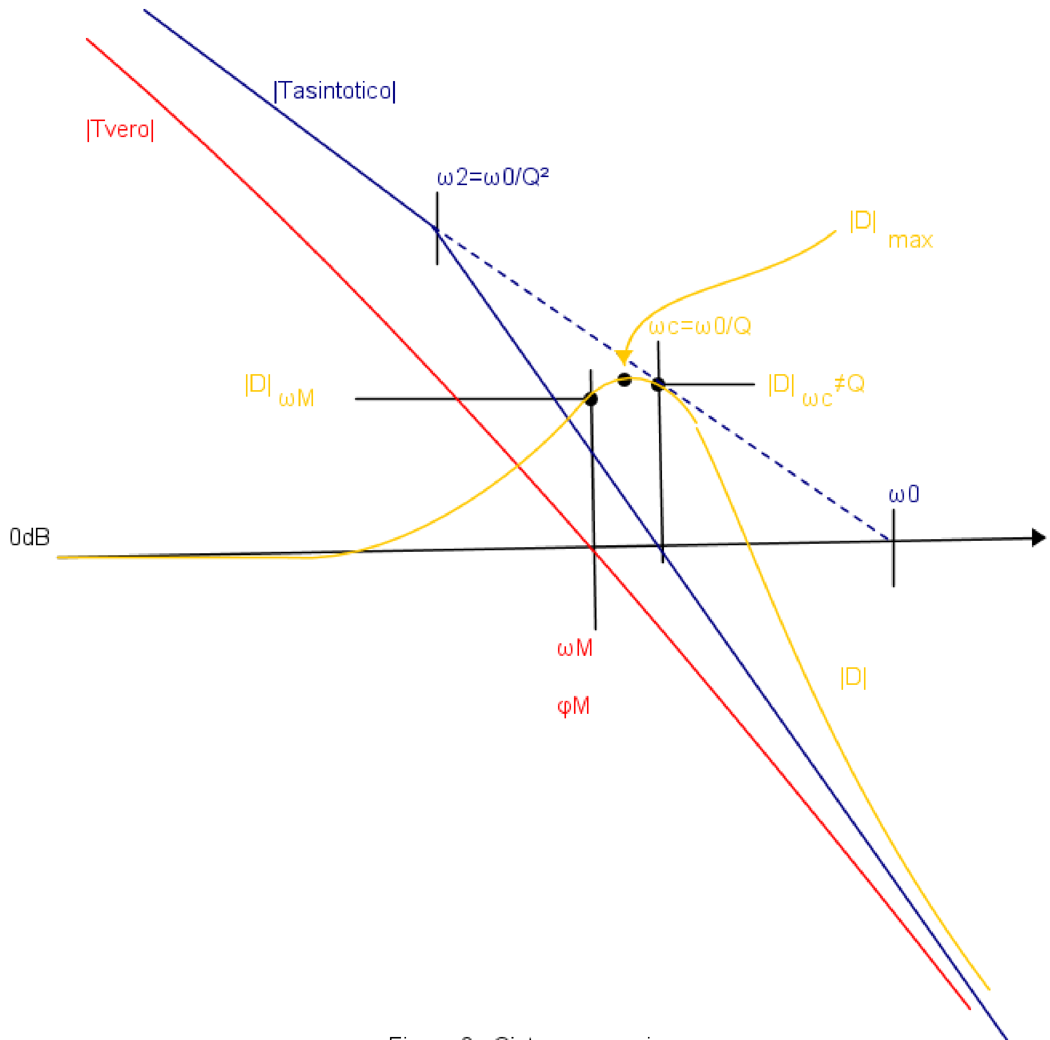


Figura 9 - Sistema generico

Se il margine di fase vale $90°$ (caso tipico dei sistemi con un solo polo),allora il modulo di D vale $\sqrt{0.5}$, ovvero, come già visto in precedenza, il sistema ad anello chiuso presenta un solo polo alla frequenza di crossover.

Si tenga presente che nel caso generico, se non è del secondo ordine, il modulo di D valutato alla frequenza ω_c dei poli non vale necessariamente Q (anzi in alcuni casi il fattore Q non è neanche definibile) e neppure il modulo calcolato alla frequenza di crossover rappresenti il massimo del picco: il valore di $|D|$ appena trovato è però un buon indicatore della presenza di eventuali picchi di risonanza nella risposta del sistema.

La misura del rapporto di ritorno di un sistema retroazionato richiede di solito apparecchiature costose, mentre la misura del margine di fase e della frequenza di crossover, cioè la misura del rapporto di ritorno ad una sola frequenza, può essere eseguita anche con strumentazione limitata (generatore e oscilloscopio), oppure misurando il picco della risposta in frequenza si può avere una *stima* del margine di fase.

7 - Note sulla classificazione della retroazione

In casi semplici è possibile classificare la retroazione a seconda del tipo di prelievo della grandezza misurata sull’uscita e del confronto operato sull'ingresso. Se cortocircuitando il carico non si ha più alcun ritorno verso l'ingresso si ha una misura di tensione (prelievo in parallelo), se invece torna ancora indietro qualcosa non è detto che la retroazione sia di corrente. Se aprendo il carico (lo si toglie) non torna indietro nulla, il prelievo è di corrente (prelievo in serie), in caso contrario non è detto sia di tensione. Esistono circuiti in cui il prelievo è misto, cioè né di sola tensione né di sola corrente.

Il riconoscimento del tipo di confronto all’ingresso può essere fatto facilmente osservando che se il segnale di ingresso e quello di retroazione entrano sullo stesso nodo all'ingresso dell'amplificatore, si ha un confronto in corrente (confronto in parallelo), mentre se entrano su nodi diversi si ha confronto in tensione (confronto in serie). Anche per l’ingresso si possono avere topologie miste. In ogni caso il calcolo delle impedenze con la formula di Blackman e del guadagno con la formula di Rosenstark [3, 4] forniscono i risultati corretti per qualunque topologia, anche mista.

Ad esempio in Fig. 10a si vede immediatamente la retroazione negativa, ma non si può dire quale sia il prelievo o il confronto. Se infatti il carico fosse R_5 il prelievo sarebbe in corrente, mentre se il carico fosse R_4 il prelievo sarebbe in tensione. Discorso analogo per l'ingresso: se la sorgente di segnale fosse in serie a R_3 il confronto sarebbe in serie, mentre se fosse in serie a R_1 il confronto sarebbe in parallelo.

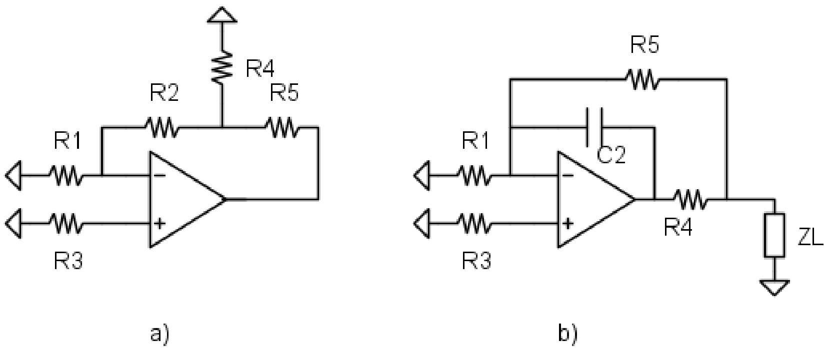


Figura 10 - Esempi di circuiti retroazionati

Nella Fig. 10b invece è mostrato un circuito con retroazione mista: sia cortocircuitando il carico Z_L, sia aprendolo, si ha sempre un segnale che torna all'ingresso dell'operazionale.

Appendice: Simboli usati

A Amplificazione dell'amplificatore base
A_{DC} Valore in continua di A
T Rapporto di ritorno (guadagno di anello)
T_0 Valore in continua di T
b Fattore di retroazione (spesso anche chiamato β)
A_F Amplificazione dell'amplificatore retroazionato
A_∞ Amplificazione ideale dell'amplificatore retroazionato
A_N Amplificazione del rumore (*noise gain*)
D Fattore di discrepanza
A_0 Termine di *feed-thru*
ω_1 Primo polo di T (o di A)
ω_2 Secondo polo di T (o di A)
ω_0 Frequenza di crossover associato al primo polo di T (o di A)
ω_T Frequenza di crossover dell'operazionale a polo singolo
ω_c Frequenza del polo (o dei poli complessi coniugati) ad anello chiuso
ω_M Frequenza del crossover vero di T
φ_M Margine di fase del sistema
ω_r Frequenza delle oscillazioni parassite (*ringing*)
ω_{pk} Frequenza del picco di A_F

Bibliografia

[1] P. J. Hurst, A Comparison of Two Approaches to Feedback Circuit Analysis, IEEE Trans. Education, Vol. ED-35, pp. 253-261, Aug. 1992
[2] H. S. Black, Inventing the Negative Feedback Amplifier, IEEE Spectrum, pp.55-60, Dic. 1977
[3] S. Rosenstark, A Simplified Method of Feedback Amplifier Analysis, IEEE Trans. Education, vol. ED-17, pp.192-198, Nov. 1974
[4] S. Rosenstark, Feedback Amplifiers Principles, New York, NY: MacMillan 1986
[5] M. Millman and A. Grabel, Microelectronics, 2nd. ed., New York: McGraw Hill, 1987
[6] Pietro Baima, Regula falsi per circuiti con più generatori, EY Gennaio 2018
[7] T. Lee, Handout #17: EE214 Fall 2002
[8] IsidoroKZ, Sensitivity I - Definizioni e Applicazioni, EY Novembre 2010