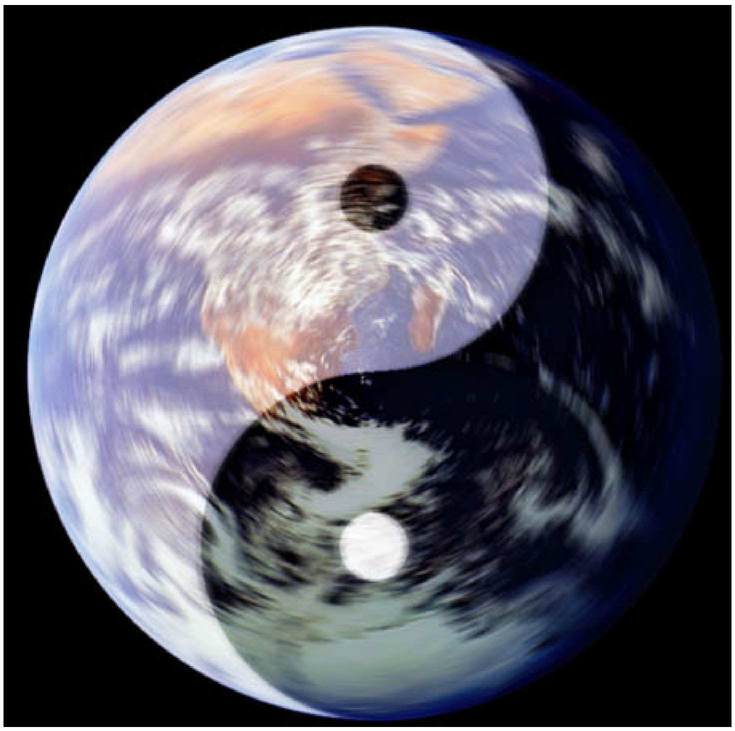
Carlo C (carloc)

ESERCIZIO DI ELETTROTECNICA 2

17 January 2011

Abstract

Anche stavolta la cosa prende spunto da un breve topic aperto nel forum, un semplice circuito RL che però presenta una particolarità interessante... a regime, nonostante il generatore sia scollegato, continua a scorrere una corrente non nulla.



Tao_YinYangEarth2.jpg

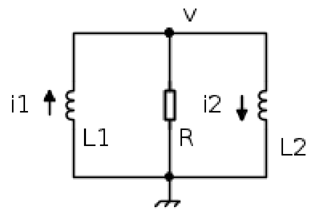
NO, TRANQUILLI, niente di esoterico, semplice conservazione, delle induttanze rimangono cariche con una certa corrente, dunque niente che possa risolvere i problemi energetici del pianeta.

Il problema duale di quello dato ha forse una soluzione più intuitiva, non farebbe impressione a nessuno se dicessi... questo condensatore è carico con una certa tensione anche se scollegato dal circuito... questo forse perchè i condensatori reali sono un'approssimazione di quelli ideali migliore rispetto a quanto si riesca a fare per le induttanze.

In effetti un condensatore aperto mantiene la tensione ai sui capi costante così come una induttanza in cortocircuito mantiene costante la corrente che ci scorre.

Circuito RLL

Al di là di alcune piccole complicazioni inserite nel testo originale il succo del problema è studiare questo semplice circuito parallelo



e noi lo faremo nelle condizioni iniziali più generali $i_1(0^-) = I_1$ e $i_2(0^-) = I_2$

Più avanti capirete il perchè dello *strano vezzo* di dare versi convenzionali diversi alle due correnti...

Analisi

Naturalmente varie sono le strade che si possono prendere, si può scrivere le equazioni alle due maglie in forma differenziale e risolverele con le opportune condizioni al contorno, oppure si può fare la stessa cosa nel dominio della s di Laplace *salvandoci* almeno il problema di Cauchy ma io invece...

- La continuità delle correnti negli induttori in t=0 ci dice che $i_1(0^-) = i_1(0^+) = I_1$ e $i_2(0^-) = i_2(0^+) = I_2$ e quindi per Kirchhoff ai nodi la corrente nella resistenza è pari alla loro differenza e in definitiva semplicemente $v(0^+) = R(I_1 - I_2)$
- Il circuito è del primo ordine, quindi evolve con un'esponenziale e deve essere decrescente dal momento che l'unica possibilità è dissipare energia in R. A regime la potenza in R deve essere zero (altrimenti non saremmo a regime) e allora $v(t \to \infty) = 0$.
- Se la tensione a regime è zero anche la corrente nella R dovrà essere zero e allora $i_2(t \to \infty) = i_1(t \to \infty)$ la corrente percorrerà la maglia esterna senza passare per R.
- La costante di tempo è data semplicemente da $\tau = (L_1 \| L_2)/R$ dato che le condizioni iniziali non cambiano l'equazione caratteristica e R vede il parallelo delle due induttanze.
- Da cui semplicemente $v(t) = R(I_1 - I_2)\, e^{-t/\tau}$ per t>0.

- Per le correnti a regime negli induttori se ne può trovere una, l'altra abbiamo gia visto che è uguale, prendendo ad esempio L1 $v = -L_1 \frac{d\, i_1}{dt}$ che integrata da 0 a ∞ ci dà:

$$i_1(t \to \infty) = i_1(0^+) - \frac{1}{L_1} \int_0^{+\infty} v(t)\, dt = \dots$$

che sostituendo le espressioni di $v(t)$ e di τ diventa dopo alcuni passaggi che vi risparmio

$$\dots = \frac{L_1 I_1 + L_2 I_2}{L1 + L2} = I_f$$

- Infine le correnti nel tempo si ottengono semplicemente scrivendo l'esponenziale che raccorda i valori finali ed iniziali trovati per t>0 si ha

$$i_1(t) = I_f + (I_1 - I_f)\, e^{-t/\tau} \; i_2(t) = I_f + (I_2 - I_f)\, e^{-t/\tau}$$

Risultati

Al di là dei transitori esponenziali quello che mi interessa mettere in evidenza è il legame tra le correnti iniziali e quella finale.

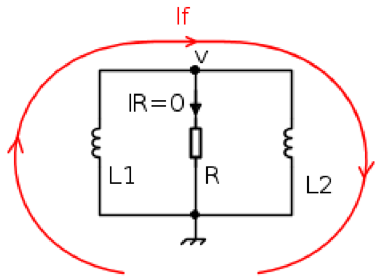
Intanto si nota come R non compaia nell'espressione della corrente finale e che quindi lo stato finale del sistema non dipenda da R, poi riarrangiando l'ultimo passaggio di I_f si ottiene

$$(L_1 + L_2) I_f = L_1 I_1 + L_2 I_2$$

che ricordando che il flusso dell'induzione magnetica vale $\Phi_B = L\, I$ si può leggere come

$$\Phi_B(t \to \infty) = L_1 I_f + L_2 I_f = L_1 I_1 + L_2 I_2 = \Phi_B(0)$$

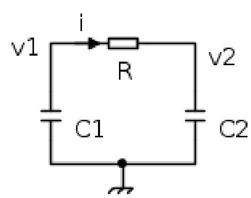
che si potrebbe enunciare come "principio della conservazione del flusso" ed in effetti dopo rapida documentazione (grazie Renzo) ho (ri)scoperto che esiste ed è il duale della conservazione della carica.



Il verso delle correnti nello schema originale l'ho fissato in modo che fossero concordi guardando la maglia esterna senza resistenza. E credo questa sia una buona condizione per fissare il segno relativo delle correnti delle due induttanze in relazione al contributo che i loro flussi daranno al circuito da un punto di vista elettrico.

Circuito RCC

Visto che abbiamo tirato in ballo la dualità vediamo questo circuito con le condizioni iniziali $v_1(0^-) = V_1$ e $v_2(0^-) = V_2$



notiamo che il verso convenzionale per le tensioni (stavolta *canonico*) ha in comune con quello del circuito RLL di essere concorde, stavolta pensando alla tensione ai nodi "superiori".

Analisi

La faremo in stretta dualità con quella fatta per l'RLL....

- La continuità delle tensioni ai capi dei condensatori in t=0 ci dice che $v_1(0^-) = v_1(0^+) = V_1$ e $v_2(0^-) = v_2(0^+) = V_2$ e quindi per Kirchhoff alle maglie la tensione ai capi della resistenza è pari alla loro differenza e in definitiva semplicemente $i(0^+) = (V_1 - V_2)/R$

- Il circuito è del primo ordine, quindi evolve con un'esponenziale e deve essere decrescente dal momento che l'unica possibilità è dissipare energia in R. A regime la potenza in R deve essere zero (altrimenti non saremmo a regime) e allora $i(t \to \infty) = 0$.

- Se la corrente a regime è zero anche la cdt sulla R dovrà essere zero e allora $v_2(t \to \infty) = v_1(t \to \infty)$ la tensione ai nodi superiori sarà la stessa.

- La costante di tempo è data semplicemente da $\tau = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} R$ dato che le condizioni iniziali non cambiano l'equazione caratteristica e R vede la serie dei due condensatori.

- Da cui semplicemente $i(t) = \frac{V_1 - V_2}{R} e^{-t/\tau}$ per t>0.

- Per la tensione finale ai capi dei condensatori, studiando ad esempio C1 si ha che

$$v_1(t \to \infty) = v_1(0^+) - \frac{1}{C} \int_0^\infty i(t)\, dt = \dots$$

$$\dots = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} = V_f$$

- Infine le tensioni nel tempo si ottengono semplicemente scrivendo l'esponenziale che raccorda i valori finali ed iniziali trovati per t>0 si ha

$$v_1(t) = V_f + (V_1 - V_f)\, e^{-t/\tau}$$

$$v_2(t) = V_f + (V_2 - V_f)\, e^{-t/\tau}$$

Risultati

Stavolta il risultato per i valori finali -anche stavolta indipendente da R- pare più intuitivo...

$$(C_1 + C_2)V_f = C_1V_1 + C_2V_2$$

rappresenta chiaramente il "principio di conservazione della carica"

$$Q(t \to \infty) = C_1V_f + C_2V_f = C_1V_1 + C_2V_2 = Q(0)$$

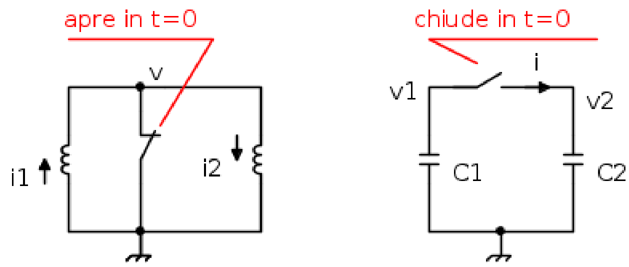
Dico che pare più intuitivo -almeno a me- forse perchè nell'esperienza "elettrica" mi risulta più facile pensare ad un *condensatore carico* piuttosto che ad un'*induttanza carica*.

Così per chiarirsi un po' le idee se carico un condensatore e lo scollego posso pensare ad una costante di tempo di autoscarica nell'ordine dei minuti o delle ore secondo il tipo e la qualità del condensatore.

Per un'induttanza invece, a parte le difficoltà pratiche di cortocircuitarla mentre ancora la alimento, resta il fatto che anche una "grossa" induttanza da 1H nell'ipotisi "ottimistica" di una resistenza degli avvolgimenti di 0.1 ohm mi da una costante di tempo nell'ordine delle decine di secondi. Magari è un fenomeno che si nota meglio negli avvolgimenti di grosse macchine elettriche.

Due casi limite

I due circuti sopra analizzati si possono anche pensare nel caso in cui non ci siano resistenze...



Lo stato finale dei sistemi si tratta semplicemente con i princìpi di conservazione prima ricordati, la carica per i condensatori, il flusso dell'induzione magnetica per le induttanze e si può dire che da questo punto di vista niente cambi rispetto ai casi con resistenza.

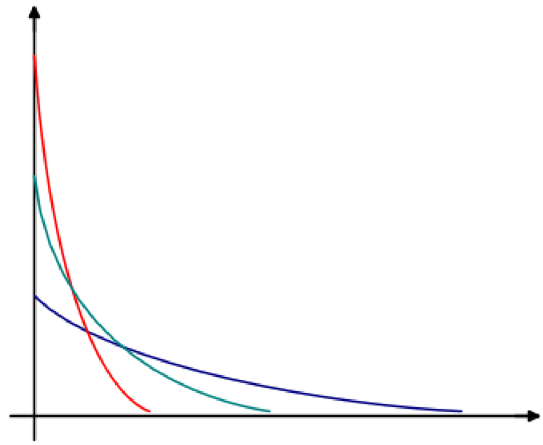
Da un punto di vista dinamico invece si ha una discontinuità e una delta di Dirac di corrente nel caso dei condensatori, o di tensione nel caso delle induttanze che "sistema" le cose.

Ed i circuiti si trovano ad essere a regime gia in $t = 0^+$

si può pensare di studiare il limite per $R \to 0$ nel caso dei condensatori e $R \to \infty$ nel caso delle induttanze, intanto si ha che

$$\tau = \lim_{R\to\infty} \frac{L_p}{R} = \lim_{R\to 0} C_s R = 0$$

le costanti di tempo tendono a zero, ma gli esponenziali prima visti per tensione (caso L) e corrente (caso C) hanno integrale indipendente da τ e si può dimostare che le successioni in R di queste funzioni sono proprio predistribuzioni che convergono ad una delta di Dirac.



..intuitivamente si può vedere come questi grafici abbiano integrale costante ma che tendano a "concentrarsi" in intervallo sempre più piccolo a destra dello zero.

Energie

Da un punto di vista delle energie totali nei sistemi si ha che ovviamente $E_f \leq E_0$ dove però, con relazioni prima trovate, è facile dimostare che l'uguaglianza si ha solo in alcuni casi particolari, cioè se $i_1(0^-) = i_2(0^-)$ ovvero $v_1(0^-) = v_2(0^-)$ o anche se una delle induttanze o uno dei condensatori vale zero (ovviamente con un solo componente il circuito è semplicemente diverso!!!)

Quindi negli altri casi "normali" l'energia finale nel sistema è strettamente minore di quella iniziale

Ora questo non è certo un problema nei casi prima studiati (con R), ma invece nei casi senza resistenze ci troviamo nel paradosso che abbiamo perdita di energia ma non c'è nessun elemento dissipativo nel circuito....

Il problema e stato magistralmente trattato da RenzoDF nel caso dei condensatori, sostanzialmente il modello usato è troppo semplice e non è in grado di descrivere gli effetti dissipativi e di irradiazione responsabili della perdita di energia.

Ovviamente la stessa trattazione si può adattare al caso delle induttanze.

Conclusioni

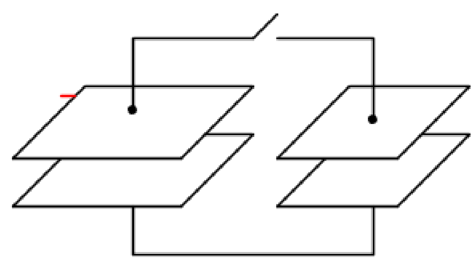
Ho cercato di trattare i due circuiti cercando di mettere in evidenza la dualità dei problemi e il punto fondamentale che secondo me è rappresentato dal principio conservazione del flusso dell'induzione magnetica nel primo caso e dal principio di conservazione della carica nel secondo.

Ovviamente non valgono in generale per qualsiasi rete, la condizione per la validità del primo è l'esistenza di una maglia che includa le induttanze e abbia resistenza nulla.

Nel secondo caso è che i condensatori vedano una conduttanza nulla.

Ancora una cosa mi lascia un po' insoddisfatto, vorrei riuscire a dualizzare maggiormente l'enunciato dei due princìpi... induzione in caso e carica nell'altro... forse si può fare meglio...

Pensando ad esempio al vettore di induzione elettrica, si ha che la sua divergenza equivale alla densità di carica $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ ed integrando i due membri sul volume tratteggiato in figura e applicando il teorema di Gauss-Green alla superficie di quel volume

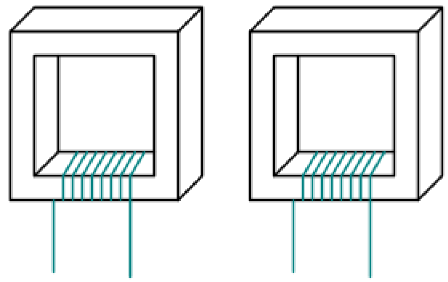


$$\Phi_D = \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D}\, dV = \iiint_V \rho\, dV = Q$$

arrivando così a dire che la conservazione della carica equivale alla conservazione del flusso dell'induzione elettrica per riunire i due fenomeni in un solo enunciato "nelle ipotesi sopra riportate i flussi delle induzioni si conservano".

D'altra parte cercare un legame con la costruzione fisica dei componenti e le effettive configurazioni dei campi può portare a qualche problema, ad esempio nel caso il campo magnetico non sia perfettamente confinato potrebbe diventa difficile definire una superficie su cui calcolare il flusso.

Se invece si hanno costruzioni toroidali o simili la cosa è più semplice



Comunque da un punto di vista circuitale è sufficiente considerare la conservazione delle quantità $\sum L_k\, i_k$ e $\sum C_k\, v_k$ con le opportune ipotesi e convenzioni sui versi gia discusse per risolvere il tutto con due conti veloci.

Vorrei concludere rimarcando ancora la dualità dei problemi, forse se con un word processor, si facesse un *trova e sostituisci* delle parole tensione/corrente, nodo/maglia, serie/parallelo, resistenza/conduttanza, induttanza/capacità,.... si potrebbe ottenere una dimostrazione dall'altra in modo automatico!

Estratto da "http://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Carloc:esercizio-di-elettrotecnica-2"