



Zeno Martini (admin)

LETTURE DI ELETTROSTATICA - SECONDA PARTE

28 August 2009

Introduzione

Ecco il secondo articolo del ripasso dei concetti di elettrostatica. Ci occuperemo dei **conduttori**.

Conduttori

Come al solito si deve precisare ciò di cui si parla.

Un conduttore è un corpo in cui esistono portatori di carica liberi di muoversi su distanze macroscopiche, cioè su distanze enormemente maggiori dei raggi atomici.

Conduttori eccellenti sono i **metalli**: in essi i portatori di carica sono gli **elettroni degli orbitali più esterni** dell'atomo, detti di valenza in chimica, che non sono legati ad un atomo in particolare ma sono liberi di muoversi all'interno del reticolo cristallino.

Un metallo lo possiamo dunque raffigurare come il contenitore di una "**nuvola di gas**" formata dagli elettroni. Gli elettroni non escono dall'involucro perché trattenuti dagli atomi che essi hanno abbandonato. Li si può estrarre conferendo loro un'energia cinetica molto superiore (qualche centinaio di volte) a quella posseduta per effetto della temperatura che è dell'ordine di 25meV (millielettronvolt: $1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Tipicamente gli **elettroni liberi** per ogni metro cubo sono $N = 10^{30} \text{ m}^{-3}$.

Quando un conduttore di volume finito e non nullo, è immerso in un campo elettrico statico, le sue cariche libere assumono una configurazione spaziale descritta dalle seguenti

proprietà

campo elettrico nullo all'interno

- Riferiamoci ai conduttori metallici. Quando è immerso nel campo, ogni elettrone libero è sottoposto ad una forza $\vec{F} = e \cdot \vec{E}$ che lo sposta determinando accumuli di cariche, quindi una zona a carica negativa ed una a carica positiva. L'accumulo di carica

corrisponde ad una densità di carica non nulla, quindi ad un campo elettrico. Tale campo elettrico, alla fine dello spostamento che avviene in tempi rapidissimi e che non coinvolge tutte le cariche libere ma solo una frazione anche piccola, annulla completamente il campo preesistente all'interno del volume occupato dal conduttore. Ad equilibrio raggiunto

il corpo conduttore è un volume equipotenziale

- è una conseguenza di quanto detto in precedenza: se lo spostamento delle cariche libere per assumere una configurazione finale statica che annulla il campo, l'integrale di linea del campo, per qualsiasi percorso interno al conduttore, è nullo; il che significa equipotenzialità.

all'interno del conduttore la densità di carica è nulla

- Considerata infatti una qualsiasi superficie chiusa interna, per ogni punto di essa il campo è nullo. Quindi il flusso elettrico uscente da essa è pure nullo, per il teorema di Gauss, è nulla la carica dentro il volume racchiuso dalla superficie. Si badi bene, ciò non significa che all'interno non vi siano più elettroni liberi, ma che per qualsiasi volume infinitesimo macroscopico (cioè piccolo per i nostri strumenti di misura ma in grado di contenere un enorme numero di atomi) la carica netta è nulla.

solo la superficie del conduttore è carica

- Per quanto detto in precedenza il campo preesistente viene annullato dallo spostamento delle cariche libere che danno luogo ad accumuli di cariche che, non potendo essere interne al conduttore, devono trovarsi unicamente sulla sua superficie. La superficie è infinitamente sottile ma non più sottile della dimensione di un atomo, quindi dell'ordine dell'angstrom ($10^{-10} m$). La densità di carica superficiale che si forma σ , è una funzione del punto. Il suo integrale, esteso alla superficie, corrisponde alla carica netta del conduttore. Se il conduttore è stato introdotto nel campo "scarico", l'integrale precedente sarà pertanto nullo.

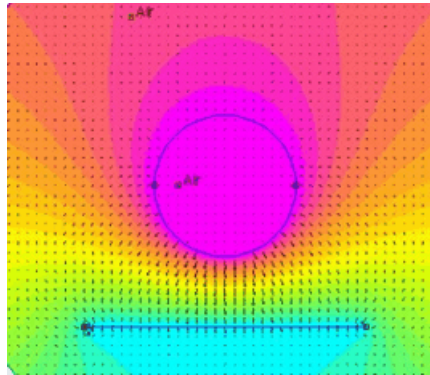
teorema di Coulomb

- il **campo elettrico** sulla superficie del conduttore è **perpendicolare alla superficie** e vale $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Dove la carica superficiale è positiva il campo è diretto verso l'esterno; dove è negativa, verso l'interno. Tale campo agisce sulle cariche superficiali tendendo a strapparle dalla superficie, mentre non ha alcun effetto tangenzialmente alla superficie evidentemente: le cariche dunque sono ferme su di essa (o meglio: in equilibrio macroscopico). Che la componente tangenziale dovesse essere nulla, è una conseguenza di quanto detto in precedenza, e cioè che il campo interno al conduttore è nullo.

Nell'attraversamento di una superficie carica, il campo conserva la componente tangenziale, mentre presenta una discontinuità nella componente normale pari appunto al valore indicato dal teorema di Coulomb.

schermo elettrostatico

- Il campo elettrico nella cavità di un conduttore immerso in un campo elettrostatico è nullo. La carica sulla superficie interna del conduttore è nulla. Qualunque cosa si faccia all'esterno, come avvicinare corpi carichi o depositare carica sul conduttore, nella cavità non c'è mai, in condizione statiche, alcun campo elettrico. Il conduttore cavo divide dunque lo spazio in due volumi, l'interno e l'esterno, elettricamente indipendenti. Come mostra l'animazione seguente. La sfera conduttrice interna è cava. All'esterno si muovono lastre cariche. La configurazione esterna cambia, ma all'interno della sfera non succede nulla.



schermo elettrostatico

effetto punta

La forza è tanto più intensa quanto più alta è la densità di carica e questa è tanto maggiore quanto maggiore è la curvatura (cioè quanto minore è il raggio di curvatura). Basta pensare che il potenziale di una sfera carica è inversamente proporzionale al raggio. Due sfere equipotenziali hanno dunque cariche proporzionali ai raggi. Indicate con Σ e σ rispettivamente le densità sulla sfera di raggio R e carica Q e raggio r e carica q , si ha

$$\frac{Q}{R} = \frac{q}{r} \rightarrow \frac{4\pi R^2 \cdot \Sigma}{R} = \frac{4\pi r^2 \cdot \sigma}{r} \rightarrow \frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{r}{R}$$

Il campo elettrico nelle vicinanze di una punta conduttrice può, all'aumentare del potenziale, diventare di valore tale da innescare una ionizzazione del gas in cui il corpo conduttore si trova, provocando la scarica elettrica.

Nota:

Se la curvatura è negativa, cioè dove la superficie è concava, la densità di carica è minore di quella che si ha su una superficie piana (curvatura nulla). Se la superficie metallica è chiusa, la densità di carica sulla superficie interna è nulla.

Induzione elettrostatica

E' il fenomeno in pratica già descritto: le cariche libere di un conduttore si spostano sotto l'azione di un campo elettrico. Quindi avvicinando un corpo carico, ad esempio positivamente, ad un conduttore, gli elettroni liberi si spostano verso il corpo inducente mentre, dalla parte opposta, rimane scoperta un'uguale carica positiva. Il fenomeno è messo ben in evidenza con l'[elettroscopio](#) ed è alla base del funzionamento di molti generatori elettrostatici: [Wimshurst](#), [Van De Graaf](#), [Elettroforo di Volta](#)

Induzione completa

L'**induzione** elettrostatica si dice **completa** se le cariche spostate dal conduttore inducente nel conduttore indotto sono in quantità uguale a quelle sul conduttore inducente. In tale situazione **tutte le linee di campo** uscenti dal (o entranti nel) corpo inducente, terminano (o iniziano) nel conduttore indotto. Tale situazione non si verifica mai per geometrie qualsiasi di conduttori per semplice avvicinamento di un conduttore carico ad un conduttore scarico, ma solo per particolari geometrie che obbligano tutte le linee del conduttore inducente ad investire il conduttore indotto. E' il caso, ad esempio, di conduttore inducente interno a conduttore indotto. Leggere in proposito [questa risposta](#). Per geometrie qualsiasi può aversi però una situazione di induzione completa trasferendo, mediante un generatore, una carica elettrica da un conduttore all'altro. E' una situazione di induzione completa prodotta però non per semplice induzione di un corpo conduttore carico posto di fronte ad uno scarico: si tratta di un'induzione forzata.

Capacità

Io ho la mania di controllare su un vocabolario il significato originario delle parole, specialmente quando, come in questo caso, una parola di uso comune è impiegata per definire una caratteristica tecnica. E' ovvio che ci si dovrà riferire alla definizione tecnica, ma ricordare anche gli altri significati è sempre utile, anche perché nella scelta tecnica si è fatto ricorso a quella parola perché già conteneva la descrizione del fenomeno che doveva rappresentare. Del resto Dante nella [Vita Nuova](#), cita un detto latino che si ispira ad un principio giuridico esposto nelle [Istituzioni di Giustiniano](#):

[Nomina sunt consequentia rerum](#) (i nomi sono conseguenti alle cose).

Dal *Devoto-Oli* dunque:

Capacità: Possibilità di contenere entro un determinato limite di quantità,

quindi attitudine a contenere qualcosa, proprietà di un recipiente coincidente in pratica con il volume dello stesso.

ma anche:

attitudine propria di un soggetto a fare qualcosa. ed in questo caso le possibilità sono innumerevoli, tante quante le cose che è possibile fare.

La capacità in elettrostatica è un po' entrambe le cose: la possiamo vedere come la possibilità di una struttura di "contenere" cariche elettriche, o, il che è equivalente, di contenere (o generare e rendere disponibile) un campo elettrico, quindi l'energia ad esso associata; ma anche, per la natura della materia, come la sua attitudine a separare e mantenere separate le cariche. Ed è proprio questa separazione che genera il campo elettrico.

Ma vediamo la definizione tecnica.

La capacità che tecnicamente interessa è quella tra due conduttori. Essa indica la quantità di carica, Q , in valore assoluto, che si separa tra l'uno e l'altro quando viene applicata una differenza di potenziale U . Le cariche libere nei conduttori sono gli elettroni. Q rappresenta pertanto la carica corrispondente al numero di elettroni liberi spostati. Il conduttore verso cui tale carica si è spostata diventa perciò carico negativamente; l'altro conduttore, da cui sono arrivati gli elettroni, assumerà un'identica carica positiva. La quantità di elettroni che si sposta, quindi il valore assoluto della loro carica, è direttamente proporzionale alla tensione applicata tra i due conduttori, detti armature, e tale costante è detta capacità.

$$C = \frac{Q}{U}$$

L'unità di misura della capacità è il **farad**: $F = \frac{C}{V}$

Tra le due armature si instaura un campo elettrico e tutte le linee di tale campo nascono sull'armatura positiva e finiscono in quella negativa. Tale situazione è detta *induzione completa* e la struttura in cui ciò si verifica, **condensatore**.

La relazione può essere verificata sperimentalmente collegando ai due conduttori, inizialmente scarichi, un generatore di tensione e misurando la quantità di carica che si trasferisce o direttamente, con un galvanometro balistico, o indirettamente per integrazione dell'andamento della corrente misurata da un amperometro:

$$Q = \int_0^{\infty} i(t) \cdot dt$$

ma può anche essere dimostrata teoricamente tenendo presente le proprietà dell'equazione di Laplace. Innanzitutto che la sua soluzione è unica quando siano note le condizioni al contorno. Nel caso del condensatore esse sono rappresentate dal potenziale delle armature. Nota la soluzione, cioè il potenziale in ogni punto esterno ai due conduttori, è noto anche il campo elettrico che ne

è il gradiente cambiato di segno. Quindi, nota la costante dielettrica del mezzo, è nota anche la densità di carica sulla superficie delle armature, quindi la carica su di esse che ne è l'integrale. Se si moltiplica per una costante la differenza di potenziale, quindi le condizioni al contorno, la linearità dell'equazione di Laplace comporta che la carica sulle armature risulterà moltiplicata per la stessa costante: il rapporto dunque tra carica e differenza di potenziale è costante.

Calcolo di capacità

La definizione di capacità permette di calcolarne l'espressione una volta che siano note le caratteristiche geometriche delle armature. Indicata con ε la costante dielettrica essa risulta una funzione dei parametri geometrici e della costante dielettrica. Le espressioni analitiche per i condensatori "classici" possono essere esaminate [qui](#). Possiamo dire che la più importante, se così si può dire, perché le altre possono esservi ricondotte quando la distanza tra le armature è molto piccola rispetto alla loro estensione, è l'espressione della capacità di un condensatore piano, le cui armature sono costituite da due conduttori piani paralleli, distanti d , e ciascuno di area A .

$$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$$

Tale formula è approssimata per un condensatore reale, in quanto è ricavata nell'ipotesi che il campo elettrico sia uniforme su tutta la superficie delle armature. Questo è vero però lontano dai bordi, dove le linee del campo in realtà si incurvano. L'approssimazione è tanto migliore quanto più l'effetto bordi è trascurabile, il che si verifica quanto più le armature sono vicine.

La capacità reale può essere calcolata ricorrendo a programmi che calcolano numericamente il campo. Ad esempio con [FEMM](#). Imposto il potenziale alle armature, il programma calcola tutto ciò che c'è da calcolare, quindi anche la carica sulle armature. Facendo il rapporto tra la carica su una di esse e la differenza tra i potenziali imposti, si ha il valore reale della capacità. Oppure si può imporre il valore delle cariche, uguali ed opposte, ed il programma calcola i potenziali delle armature.

Vediamo un paio di esempi di calcolo.

Armature piane

$$d = 50 \text{ mm}$$

$$A = 0,5 \times 1 \text{ m}^2$$

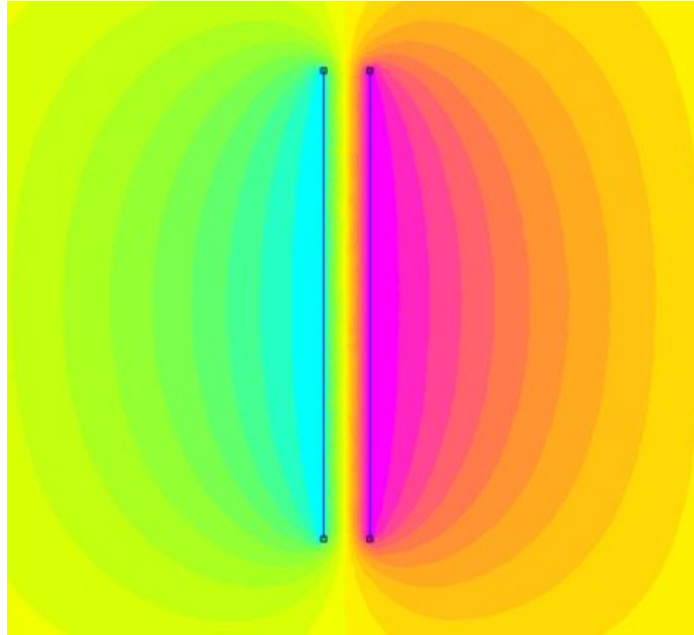
$$\varepsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

$$V_1 = 100 \text{ V} \quad V_2 = -100 \text{ V}$$

è

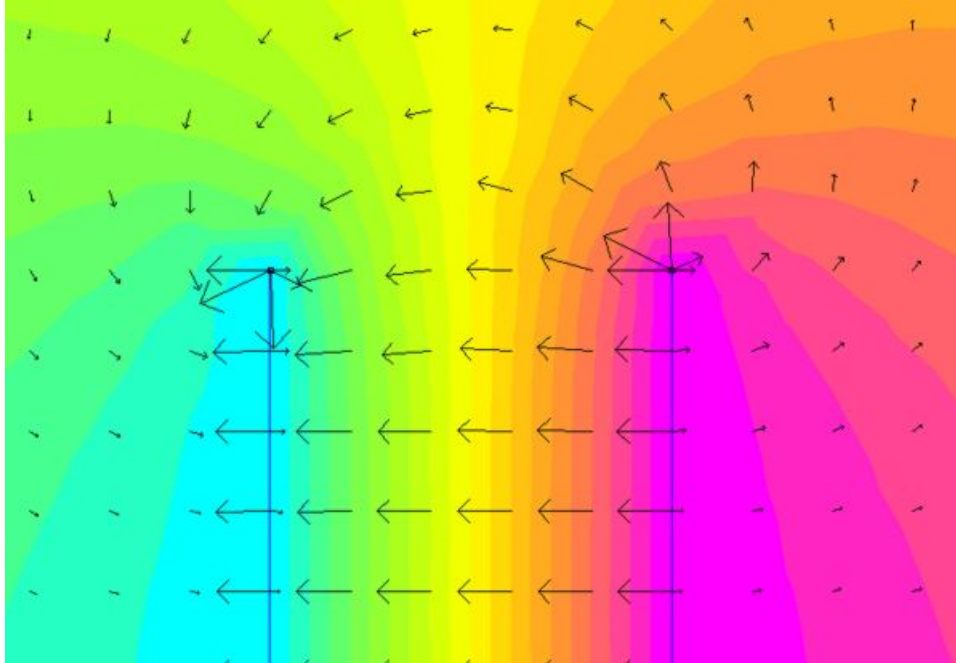
$$U = V_1 - V_2 = 200 \text{ V}$$

Il programma, oltre all'andamento delle superfici equipotenziali



lastre.jpg

e del campo elettrico ai bordi

*bordo.jpg*

fornisce

$$Q = 2,132 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

quindi

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2,132 \cdot 10^{-8}}{200} = 1,066 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

applicando la formula, che non tiene conto della deformazione del campo ai bordi e del fatto che il campo elettrico si estende anche oltre lo spazio compreso tra le lastre, otteniamo

$$C = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{0,5}{0,05} = 0,885 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

ill 23,5% in meno.

Se avviciniamo le lastre ad 1 mm, il programma fornisce

$$Q = 8,932 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

quindi

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{8,932 \cdot 10^{-7}}{200} = 4,466 \cdot 10^{-9} \text{ F}$$

applicando la formula, stavolta otteniamo

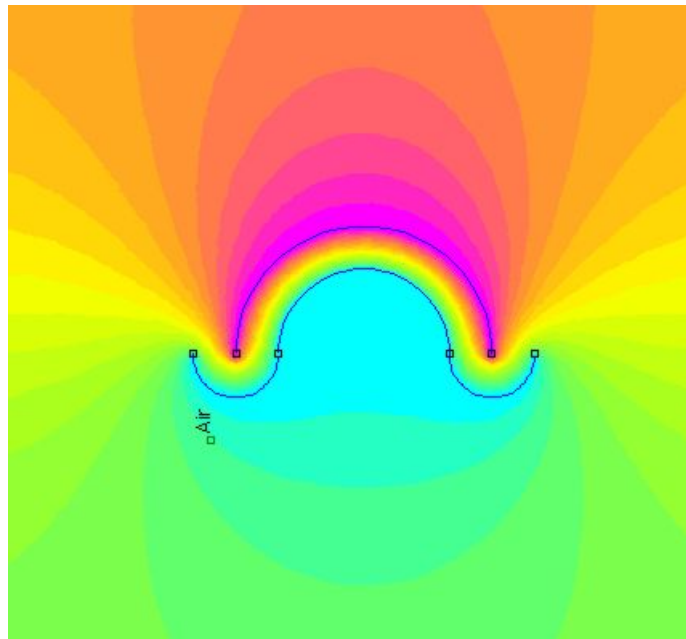
$$C = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{0,5}{0,001} = 4,425 \cdot 10^{-9} \text{ F}$$

il 0,9% in meno.

Cappello di Napoleone

Non c'è limite alla forma delle armature. Ecco ad esempio un condensatore con armature curve che si sviluppano perpendicolarmente al piano per la profondità di un metro. Il diametro del semicerchio maggiore, che costituisce l'armatura cui è imposto il potenziale $V_1 = 100 \text{ V}$ è di 300 mm. La distanza tra i due semicerchi è di 50 mm. All'altra armatura è imposto il potenziale $V_2 = -100 \text{ V}$

Ecco il tracciato delle superfici equipotenziali che giustificano un po' il nome attribuito a questo condensatore (che non ha applicazioni particolari se non quella di apparire in questo articolo come esercizio)



Cappello di Napoleone

Il programma fornisce

$$Q = 2,22 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

per cui la capacità vale

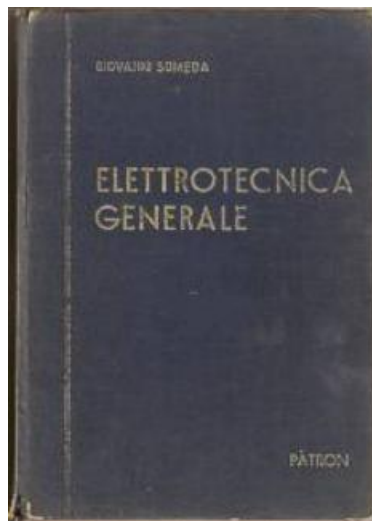
$$C = \frac{2,22 \cdot 10^{-8}}{200} = 1,11 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

Stavolta evitiamo il confronto con il calcolo della formula teorica anche perché non c'è.

Riferimenti bibliografici e link



Elettromagnetismo-Alessandro Bettini



Elettrotecnica generale - Giovanni Smeda

[Induzione elettrostatica](#)

Estratto da ["https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:elettrostatica2"](https://www.electroyou.it/mediawiki/index.php?title=UsersPages:Admin:elettrostatica2)